This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3239.03

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

By Exchange

Math. 3239.03

Ueber

partielle Differentialgleichungen,

die in der Variationsrechnung vorkommen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät

der

Königlichen Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von

Wilhelm Hertz

aus Berlin.

Göttingen 1903.

Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kästner.

Ueber

partielle Differentialgleichungen,

die in der Variationsrechnung vorkommen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät

der

Königlichen Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von

Wilhelm Hertz
aus Berlin.

Opponenten:

Herr Dr. phil. **Fritz Ahl.**
Herr Dr. phil. **Erich Boehm.**
Herr Dr. phil. **Franz Lindig.**

Göttingen 1903.
Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kästner.

Math 3239.03

Harvard College Library.
May 1[illegible] 1904.
By Exchange.
University of Kiel.

No. 5.
Rektoratsjahr 1903/4.
Zum Druck genehmigt:
Dr. Kauffmann,
z. Zt. Dekan.

Einleitung.

§ 1.

Da die folgenden Untersuchungen in Fragestellung und Methode an eine Abhandlung von Herrn Hirsch[1]) anknüpfen, mögen zunächst dessen Resultate kurz wiedergegeben werden.

In der Variationsrechnung beginnt man mit der Aufgabe, eine Funktion y von x so zu bestimmen, dass das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird, wenn f eine gegebene Funktion ihrer Argumente ist, und zeigt, dass die gesuchte Funktion y der Differentialgleichung

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(2n)}) = V(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right] = 0$$

genügen muss, die von der $2n$ten oder einer geringeren aber, wie man weiss[2]), jedenfalls geraden Ordnung ist.

Die Funktion F hat, wie Jacobi gezeigt hat[3]), die merkwürdige Eigenschaft, dass der aus ihr abgeleitete lineare homogene Differentialausdruck

$$\delta F = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} u^{(k)}$$

sich selbst adjungiert ist, d. h. dass die Identität

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} u^{(k)} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} u\right]$$

besteht; u bedeutet dabei eine willkürliche Funktion von x.

---

1) A. Hirsch, *Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* Math. Annalen Bd. 49. 1897, S. 49—72.

2) G. Frobenius, *Ueber adjungierte lineare Differentialausdrücke.* Journal für Mathematik, Bd. 85. 1878, S. 206.

3) C. G. J. Jacobi, *Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen.* Journal für Mathematik, Bd. 17. 1837, S. 68—82; wieder abgedruckt Ges. Werke, Bd. 4, S. 39—55 und Ostwald's Klassiker Nr. 47, S. 87—98.

Dass diese Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung eine charakteristische ist, hat Herr Hirsch gezeigt, indem er folgenden Satz bewies:

Wenn die Funktion $F(x, y, y', \cdots, y^{(2n)})$ von der geraden Ordnung $2n$ die Eigenschaft hat, dass der aus ihr abgeleitete lineare homogene Differentialausdruck

$$\delta F = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} u^{(k)}$$

sich selbst adjungiert ist, so lässt sich durch Quadraturen eine Funktion $f(x, y, y', \cdots y^{(n)})$ ermitteln derart, dass F mit Hülfe von f in der Form dargestellt werden kann

$$F = V(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right].$$

Die Differentialgleichung $F = 0$ ist mithin der Aufgabe der Variationsrechnung äquivalent, das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\, dx$$

zu einem Extremum zu machen.

Diese Fragestellung lässt sich sofort auf vielfache Integrale und partielle Differentialgleichungen übertragen. Es seien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n unabhängige Veränderliche, y eine unbekannte Funktion von ihnen. Es werde ferner

$$y_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} = \frac{\partial^{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$$

gesetzt: dann muss eine Funktion y, die das $n$fache Integral

$$\int_{(n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y; \ldots y_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} \ldots)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

zu einem Extremum macht, der partiellen Differentialgleichung genügen:

$$F = V(f) = \sum (-1)^{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n} \frac{d^{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n}}{dx_1^{\nu_1} dx_2^{\nu_2} \ldots dx_n^{\nu_n}} \left[\frac{\partial f}{\partial y_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}}\right] = 0.$$

Auch hier hat F, wie Herr Hirsch zeigt, stets die Eigenschaft, dass der lineare homogene Differentialausdruck

$$\delta F = \sum \frac{\partial F}{\partial y_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}} u_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}$$

sich selbst adjungiert ist, dass also die Identität

$$\sum \frac{\partial F}{\partial y_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}} u_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} = \sum (-1)^{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n} \frac{d^{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n}}{dx_1^{\nu_1} dx_2^{\nu_2} \ldots dx_n^{\nu_n}} \left[\frac{\partial F}{\partial y_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}} u\right]$$

besteht.

Herr Hirsch bezeichnet es als wahrscheinlich, dass auch bei beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen der Rückschluss von der genannten Eigenschaft des Ausdruckes δF auf die Structur der Funktion F gestattet ist, begnügt sich aber mit der Untersuchung des besonderen Falles, dass man sich auf partielle Differentialausdrücke zweiter Ordnung mit 2 und 3 unabhängigen Variabeln beschränkt, „da dem Nachweise der Richtigkeit dieser Vermutung grössere Schwierigkeiten entgegenzustehen scheinen".

Er hat dabei folgende Ergebnisse gewonnen:

Man setze:

$$y_i = \frac{\partial y}{\partial x_i};\ y_{ik} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k},$$

und es liege ein partieller Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y;\ y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nn})$$

vor. Damit δF sich selbst adjungiert ist, muss sein:

$$\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial y}u + \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}u_i + \sum_{i \leqq k}\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}u_{ik} \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}u - \sum_i \frac{d}{dy_i}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i}u\right] + \sum_{i \leqq k}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\left[\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}u\right].\end{aligned}$$

Führt man noch nach dem Vorgange von Kronecker das Zeichen δ_{ik} ein, das, wenn $i \neq k$ ist, den Wert Null hat, wenn $i = k$ ist, den Wert 1 darstellt, so ergeben sich hieraus durch Vergleichung folgende 2 Gruppen von Relationen:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left[\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}\right](1+\delta_{ik}) = 2\frac{\partial F}{\partial y_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(2)\qquad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\left[\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}\right](1+\delta_{ik}) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx_k}\left[\frac{\partial F}{\partial y_k}\right]. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Da jedoch die Relationen der zweiten Gruppe eine unmittelbare Konsequenz der Relationen der ersten Gruppe sind, genügt es, diese allein zu beachten.

Entwickelt man den Ausdruck auf der linken Seite und fasst die Terme für sich zusammen, welche die dritten Ableitungen von y enthalten, so findet man weiter

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu\nu}}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{\mu\nu})\,y_{\mu\nu i} = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Damit δF sich selbst adjungiert ist, muss daher das System von Differentialgleichungen

$$(S)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu\nu}}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{\mu\nu}) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{i\mu}\partial y_{\nu k}}(1+\delta_{i\mu})(1+\delta_{\nu k}) + \\ \qquad + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{i\nu}\partial y_{k\mu}}(1+\delta_{i\nu})(1+\delta_{k\mu}) = 0 \\ \qquad (i \leqq k \leqq \mu \leqq \nu = 1, 2, \ldots, n)\end{cases}$$

erfüllt sein.

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend für das Verschwinden der dritten Ableitungen in (1).

Bei der weiteren Diskussion beschränkt sich Herr Hirsch auf den Fall, dass nur 3 unabhängige Variabele auftreten. Im Falle $n = 3$ lässt sich nämlich leicht zeigen, dass die allgemeinste Lösung des Systemes (S) eine lineare Funktion der symmetrischen Determinante $| y_{11} y_{22} y_{33} |$ und ihrer sämtlichen Subdeterminanten ist. Auf Grund dieses Satzes beweist er dann, dass F auf die Form $V(f)$ gebracht werden kann, wo f selbst von der zweiten Ordnung ist.

Hier knüpft die vorliegende Abhandlung an.

In dem ersten Abschnitt wird der Versuch gemacht, jenen Satz über das System (S) auf beliebig viele Variabele auszudehnen, also folgendes Theorem zu beweisen:

I. Die allgemeinste Lösung des Systemes (S) von Differentialgleichungen ist eine lineare Funktion der symmetrischen Determinante

$$\Delta = | y_{11} y_{22} \cdots y_{mm} |$$

und ihrer sämtlichen Subdeterminanten.

Zu diesem Zwecke wird, nachdem in § 2 einige Bemerkungen über symmetrische Determinanten und ihre Subdeterminanten vorangeschickt sind, in § 3 eine Methode entwickelt, das Theorem I unter der Annahme, dass es für $n = m-1$ richtig ist, für $n = m$ zu beweisen, und in Verfolgung dieses Weges in § 4 gezeigt, dass dieser Schluss von $n-1$ auf n dann und nur dann richtig ist, wenn eine sehr naheliegende Lösung eines bestimmten Systems algebraischer Gleichungen $(\mathfrak{S})$ eine erlaubte ist, d. h. wenn sie einer allgemeinen Lösung eines gewissen von (S) abgezweigten Systemes von Differentialgleichungen (Σ) entspricht.

Nachdem in § 5 die offen gebliebene Frage nach der Erlaubtheit jener Lösung des Systemes $(\mathfrak{S})$ zunächst präzisiert ist, stellt sich bei der weiteren Untersuchung heraus, dass ihre Beantwortung von dem Nachweise abhängt, ob unter den Gleichungen eines gewissen linearen Systemes τ unabhängige sind, wo τ eine ganz bestimmte Zahl ist, oder, was dasselbe ist, von dem Nachweise, dass wenigstens eine Determinante τten Grades einer bestimmten Matrix, deren Elemente die Werthe $0, +1, -1$ haben, von Null verschieden ist.

Dass es stets eine solche Determinante giebt, ist sehr wahrscheinlich, jedoch scheint der Beweis dafür nicht leicht zu sein. Wohl aber lässt sich zeigen, dass diese Behauptung für $n \leqq 7$ richtig ist, so dass mindestens für diese Werte von n die Gültigkeit des Theorems I dargethan ist.

Zum Vorstehenden sei noch bemerkt:

1) Der von Herrn Hirsch behandelte Fall $n = 3$ muss als singulärer bezeichnet werden. Es fehlen nämlich in diesem Falle gewisse Gruppen von Differentialgleichungen im Systeme (S). Infolgedessen tritt bei dem Schluss von $n = 2$ auf $n = 3$ jenes algebraische Gleichungssystem $(\mathfrak{S})$, in dessen Lösung

die Schwierigkeit der Aufgabe liegt, noch garnicht auf, so dass dieser Schluss ohne weiteres gemacht werden kann. Erst die Behandlung von Fällen, wo $n > 3$ ist, giebt daher eine sichere Grundlage für die Vermutung, dass das Theorem I allgemeine Gültigkeit habe.

2) Da das Verfahren eines Schlusses von $n-1$ auf n auf algebraische Schwierigkeiten stiess, habe ich auch den Versuch gemacht, das System (S) auf direktem Wege zu integrieren. Bei der Durchführung der sehr mühsamen Rechnung kam ich indes zum Schluss auf ein ganz analoges algebraisches Problem, dessen Lösung mir ebenfalls nur für die Fälle $n \leqq 7$ gelang. Die grosse Verwickelung der Formeln liess aber eine Darstellung des Beweises auf diesem Wege nicht als angebracht erscheinen.

In § 6 werden unter der Annahme, dass n eine Zahl bedeute, für die das Theorem I Gültigkeit hat, diejenigen Relationen entwickelt, die für die Koeffizienten der Subdeterminanten aus der Bedingung folgen, dass δF sich selbstadjungiert ist. Man erhält diese Relationen, wenn man den für F gefundenen Wert in (1) einsetzt und die dadurch entstandenen Gleichungen in allgemeinster Weise identisch erfüllt.

Der zweite Abschnitt dient dem Nachweise, dass F auf die Form $V(f)$ gebracht werden kann. Zu diesem Zwecke werden in § 7 zunächst die beiden allgemeinen Sätze bewiesen:

1) Lässt sich der Differentialausdruck zweiter Ordnung F von der Beschaffenheit, dass sein δF sich selbst adjungiert ist, auf die Form $V(f)$ bringen, so ist f in Bezug auf die zweiten Ableitungen ein Ausdruck derselben Structur wie F.

2) Ist φ eine lineare Funktion der Subdeterminanten der symmetrischen Determinante $|\, y_{11}\, y_{22} \ldots y_{nn}\,|$, so hat $V(\varphi)$ dieselbe Beschaffenheit.

Der Beweis des Satzes 2) wird durch ausführliche Entwickelung des Ausdruckes $V(\varphi)$ erbracht. In § 8 werden sodann geeignet construierte Grössen $V(\varphi)$ in der entwickelten Form dazu benutzt, um durch ihre Subtraktion von F diesen Ausdruck nach und nach zu Null zu machen. Nachdem das Verfahren zuerst in allgemeiner Weise skizziert ist, wird es für $n = 4$ und $n = 5$ wirklich durchgeführt und so wenigstens für diese Werte von n der Beweis erbracht für das Theorem:

II. Hat der Differentialausdruck

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y;\ y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nn})$$

die Eigenschaft, dass sein δF sich selbst adjungiert ist, so lässt sich stets durch Quadraturen eine Funktion f, die selbst von der zweiten Ordnung ist, ermitteln, vermöge deren F in der Form $V(f)$ dargestellt werden kann. Die Differentialgleichung $F = 0$ ist also

dem Problem der Variationsrechnung

$$\delta \int_{(n)} f dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

äquivalent.

Auch für $n = 6$ habe ich die Rechnung noch durchgeführt und das Theorem II für richtig befunden. Von einer Mitteilung der Rechnung glaubte ich jedoch Abstand nehmen zu sollen, da sie ziemlich umfangreich und von der für $n = 5$ prinzipiell nicht verschieden ist. Die Vermutung des Herrn Hirsch trifft demnach für $n = 4$, 5 und 6 zu, und da der Nachweis auf Hülfssätzen beruht, die für beliebiges n gelten, so kann es als sehr wahrscheinlich bezeichnet werden, dass sie auch allgemein richtig ist.

Bevor ich zum Thema übergehe, drängt es mich, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. P. Stäckel für die gütigen Ratschläge und die Teilnahme am Verlaufe meiner Arbeit auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

---

§ 2.

Vorbemerkung über symmetrische Determinanten.

Um einer unnötigen Beschwerung des eigentlichen Textes der Arbeit vorzubeugen, soll in dieser Vorbemerkung die dort angewandte Bezeichnung einer symmetrischen Determinante und ihrer Subdeterminanten sowie die Fassung, die einige bekannte Sätze der Determinantentheorie mit Hülfe dieser Bezeichnung erhalten, mitgeteilt werden.

Es sei Δ die symmetrische Determinante $n$ten Grades:

$$| y_{11} y_{22} \dots y_{nn} | .$$

Jede beliebige Subdeterminante $(n-\nu)$ten Grades von Δ ist dann eindeutig charakterisiert durch ein Symbol der Form:

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}$$

vermöge der Definition:

$$\text{(I)} \quad \Delta \begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix} = (-1)^{(ab\dots cpq\dots r)+(a_1 b_1 \dots c_1 p_1 q_1 \dots r_1)} \cdot | y_{pp_1} y_{qq_1} \dots y_{rr_1} |$$

Es bedeuten hier:

1) $a\,b\ldots c$ und $a_1\,b_1\ldots c_1$ irgend zwei Kombinationen der νten Klasse der n Elemente $1, 2, \ldots, n$ in beliebiger Reihenfolge, wo ν die Werte $1, 2, \ldots, n$ haben kann;

2) $p\,q\ldots r$ und $p_1\,q_1\ldots r_1$ die diese Kombinationen zur $n$ten Klasse ergänzenden Elemente in beliebiger Reihenfolge;

3) Das Symbol $(a\,b\ldots c\,p\,q\ldots r)$ die Zahl 0 oder 1, jenachdem die Permutation $a\,b\ldots c\,p\,q\ldots r$ der geraden oder ungeraden Permutationsklasse angehört.

Durch diese Vorzeichenbestimmung wird bewirkt, dass jedes Glied des Produktes

$$| y_{aa_1} y_{bb_1} \cdots y_{cc_1} | \, \Delta \begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1\, b_1 \ldots c_1 \end{pmatrix}$$

ein Glied der Determinante Δ mit richtigem Vorzeichen wird.

Zur Vereinfachung der Rechnung mit dem Symbol $\Delta \begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1\, b_1 \ldots c_1 \end{pmatrix}$ dient die Festsetzung (I).

Es sollen künftig charakterisiert werden:

Kombinationen der νten Klasse durch $a\,b\ldots c$ resp. $a_1\,b_1\ldots c_1$

„ „ $(\nu-1)$ten „ „ $\alpha\,\beta\ldots\gamma$ „ $\alpha_1\,\beta_1\ldots\gamma_1$

„ „ $(\nu-2)$ten „ „ $a\,b\ldots c$ „ $a_1\,b_1\ldots c_1$.

Es bedeutet also z. B. $\Delta \begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\gamma \\ \alpha_1\,\beta_1\ldots\gamma_1 \end{pmatrix}$ eine Subdeterminante der $(n-\nu+1)$ten Klasse.

Auf alle in der Abhandlung überhaupt benutzte Symbole beziehe sich die Festsetzung (II):

Hat eine durch ein Symbol dargestellte Grösse keinen Sinn in Hinsicht auf die Definition des Symbols, so ist sie gleich Null zu setzen.

So ist z. B. $\Delta \begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\gamma\, i \\ a_1\, b_1 \ldots c_1 \end{pmatrix} = 0$, wenn i unter den Indices $\alpha\,\beta\ldots\gamma$ enthalten ist, weil die Definition (I) fordert, dass $\alpha\,\beta\ldots\gamma\,i$ eine Kombination der νten Klasse der n verschiedenen Indices $1, 2, \ldots, n$ ist.

Mit Hülfe dieser Bezeichnungen erhält man folgende Formeln, die ohne Beweis hingeschrieben seien, da sie nur der Ausdruck für bekannte Sätze sind.

Als Ausdruck der Symmetrie der Determinante Δ erhält man:

$$(1) \qquad \Delta \begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1\, b_1 \ldots c_1 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} a_1\, b_1 \ldots c_1 \\ a\ b\ \ldots c \end{pmatrix}.$$

Der Satz, dass eine Determinante ihr Vorzeichen ändert, wenn man zwei Zeilen resp. zwei Spalten mit einander vertauscht, findet seinen allgemeinsten

Ausdruck in der Formel:

$$(2)\quad (-1)^{(a\,b\,\ldots\,c)+(a_1\,b_1\,\ldots\,c_1)}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix} = (-1)^{(e\,f\,\ldots\,g)+(e_1\,f_1\,\ldots\,g_1)}\Delta\begin{pmatrix} e & f & \ldots & g \\ e_1 & f_1 & \ldots & g_1 \end{pmatrix},$$

wenn $e\,f\ldots g$ eine Permutation von $a\,b\ldots c$, $e_1\,f_1\ldots g_1$ eine solche von $a_1\,b_1\ldots c_1$ ist.

Die Entwickelbarkeit einer Determinante nach den Elementen einer Zeile resp. Spalte wird ausgedrückt durch die beiden parallelen Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \sum_{\lambda=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma & k \\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & \lambda \end{pmatrix} y_{k\lambda} = \Delta\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &\text{b)}\quad \sum_{k=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma & k \\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & \lambda \end{pmatrix} y_{k\lambda} = \Delta\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Endlich erhält man bei Beachtung der Festsetzung (II):

$$(4)\quad \frac{\partial\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{k\lambda}} = \left(1-\tfrac{1}{2}\,\delta_{k\lambda}\right)\left[\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c & k \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 & \lambda \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c & \lambda \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 & k \end{pmatrix}\right]$$

Die Definition des Symbols $\delta_{k\lambda}$ ist in § 1 bereits gegeben.

Abschnitt I.

§ 3.

Methode zur Integration des Systemes (S) von Differentialgleichungen.

Mit dem Symbole (S_m) sei der Abkürzung halber das System (S) bezeichnet für den Fall, dass die Anzahl der unabhängigen Variabeln $v = m$ ist.

Es werde nun angenommen, dass im Falle $v = n-1$ das Theorem (I) § 1 richtig ist. Es sei also

$$(A)\quad F = A\Delta + \sum_{a}\sum_{a_1} A\binom{a}{a_1}\Delta\binom{a}{a_1} + \cdots + \sum_{a\,b\ldots c}\sum_{a_1 b_1 \ldots c_1} A\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1 b_1 \ldots c_1}\Delta\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1 b_1 \ldots c_1} + \cdots + A\binom{1\,2\ldots n-1}{1\,2\ldots n-1}$$

die allgemeinste Lösung des Systemes (S_{n-1}). Die Summen sind hier über alle Kombinationen der betreffenden Klasse zu erstrecken, die Indices $a\,b\ldots c$ und $a_1 b_1 \ldots c_1$ in natürlicher Reihenfolge zu nehmen.

Die Koeffizienten A sind abhängig nur von den $x_1, x_2, \ldots, x_n; y; y_1, y_2, \ldots, y_n$, unabhängig von den $y_{k\lambda}$. Ihre Indices charakterisieren nur ihre Zugehörigkeit zu bestimmten Determinanten.

Das System (S_n) umfasst das System (S_{n-1}). Es ist also: $(S_n) \equiv (S_{n-1}) + (\Sigma_n)$, wo (Σ_n) für den Komplex derjenigen Differentialgleichungen gesetzt ist, die das System (S_n) mehr enthält als das System (S_{n-1}).

Integriert man daher zwecks Integration des umfassenderen Systemes (S_n) zunächst das Teilsystem (S_{n-1}), so erhält man nach Voraussetzung einen Ausdruck von der Form (A), in dem die Koeffizienten A unabhängig sind von allen denjenigen $y_{k\lambda}$, die in dem System (S_{n-1}) vorkommen, die also den Index n nicht enthalten. Dagegen sind die A dann noch Funktionen von $y_{1n}, y_{2n}, \ldots, y_{nn}$ und müssen in allgemeinster Weise so bestimmt werden, dass F auch noch dem System (Σ_n) genügt.

Die Gleichungen des Systemes (S_n) lassen sich in folgende 5 Gruppen ordnen:

I. $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ii}^2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

II. $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{ik}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \\ (i \neq k) \end{pmatrix}$$

III. $$\frac{2\,\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{kk}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}^2} = 0 \qquad (i < k = 1, 2, \ldots, n)$$

IV. $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{k\mu}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{i\mu}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k < \mu = 1, 2, \ldots, n \\ \mu \neq i \neq k \end{pmatrix}$$

V. $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu\nu}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\mu}\partial y_{k\nu}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\nu}\partial y_{k\mu}} = 0. \qquad (i < k < \mu < \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Durch Fortlassen derjenigen Gleichungen, die bereits dem System (S_{n-1}) angehören, erhält man hieraus das System (Σ_n):

I. $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}^2} = 0$$

II. a) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}\partial y_{kn}} = 0 \qquad$$ b) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{in}} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

III. $$\frac{2\,\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{nn}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{in}^2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

IV. a) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}\partial y_{k\mu}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{kn}\partial y_{\mu n}} = 0 \qquad (k < \mu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

b) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{kn}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{in}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ i \neq k \end{pmatrix}$$

V. $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu n}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{k\mu}\partial y_{in}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{in}\partial y_{kn}} = 0. \qquad (i < k < \mu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Die Aufgabe kann jetzt, wie folgt, präcisiert werden: Die Funktionen A des Ausdruckes (A) sind in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass F dem System von Differentialgleichungen (Σ_n) genügt. Zu dem Behufe sollen die durch die linken Seiten der Gleichungen (Σ_n) vorgeschriebenen Operationen gruppenweise auf den Ausdruck (A) angewandt werden. Man erhält dann bei Berücksichtigung von § 2 (4) lineare Funktionen Φ der Subdeterminanten von Δ, die gleich Null zu setzen sind. Die so erhaltenen Relationen $\Phi = 0$ lassen sich in allgemeinster Weise erfüllen, indem man den Koeffizienten einer jeden Determinante gleich Null setzt; denn es bestehen zwar, wie Kronecker[1]) gezeigt hat,

1) L. Kronecker, *Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme.* Berichte der Berliner Akademie 1882, Seite 824. Wieder abgedruckt Ges. Werke, Band 2, Seite 395—396.

zwischen den Subdeterminanten symmetrischer Determinanten gewisse lineare Relationen. Aber die Erfüllung der Gleichungen $\Phi = 0$ in der angegebenen Weise bleibt die allgemeinste auch bei Annahme beliebiger Relationen zwischen den Determinanten; denn gerade wegen dieser Relationen darf man dann so vielen Koeffizienten ganz beliebige Werte, also auch den Wert Null beilegen, bis die übrig bleibenden Determinanten von einander unabhängig sind. Deren Koeffizienten müssen dann wegen der Gleichungen $\Phi = 0$ verschwinden.

Die Koeffizienten der Subdeterminanten von Δ in den Φ sind lineare Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen A nach den $y_{\lambda\lambda}$. Ihr Nullwerden liefert also ein System linearer Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zwischen den Funktionen A, das gruppenweise integriert werden soll.

Zum Schluss sei noch Folgendes bemerkt. Da

$$\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \\ a\ b\ \dots\ c \end{pmatrix} \qquad [\S\ 2\ (1)]$$

ist, so ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit des Ausdruckes (A), wenn man setzt:

$$A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \\ a\ b\ \dots\ c \end{pmatrix}.$$

Zwecks bequemen Rechnens mit den Funktionen A sei ausserdem festgesetzt:

$$A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} e\ f\ \dots\ g \\ e_1\ f_1\ \dots\ g_1 \end{pmatrix},$$

wenn $ef\dots g$ eine Permutation von $ab\dots c$ und $e_1 f_1 \dots g_1$ eine solche von $a_1 b_1 \dots c_1$ ist.

---

§ 4.

Herleitung und Integration der Differentialgleichungen für die Functionen A.

Gruppe I.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{\mu\mu}^2} = 0.$$

Setzt man für F den Ausdruck (A) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{\mu\mu}^2} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} = 0,$$

also:

$$\frac{\partial^2 A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{nn}^2} = 0.$$

Die Integration ergiebt:

$$\text{(I)} \qquad A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} y_{nn} + C\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix},$$

wo die B und C noch beliebige Funktionen von $y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{n-1,n}$ sind.

Gruppe II.

a) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}\partial y_{kn}} = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Durch Anwendung auf den Ausdruck (A) erhält man:

$$\frac{\partial^2 A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{nn}\partial y_{kn}} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} = 0,$$

also:

$$\frac{\partial^2 A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{nn}\partial y_{kn}} = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Bei Benutzung des Resultates (I) geht diese Gleichung über in

$$\frac{\partial B\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{kn}} = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Daher ist

$$\text{(II)} \qquad B\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix} = \text{const.},$$

d. h. von allen zweiten Ableitungen unabhängig.

b) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{in}} = 0. \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Vermöge § 2 (4) erhält man:

$$\frac{\partial A\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{in}} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ i \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1\ i \end{pmatrix} = 0. \qquad (i = 1, \dots, n-1)$$

Wegen § 2, Festsetzung (II) verschwindet dieser Ausdruck identisch, wenn der Index i unter den Indices $a\,b\ldots c$, $a_1\,b_1\ldots c_1$ enthalten ist. Damit die Relation in jedem Falle erfüllt ist, muss gelten:

$$\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1 b_1 \ldots c_1}}{\partial y_{in}} = 0,$$

wenn keine der beiden Kombinationen $a\,b\ldots c$ und $a_1\,b_1\ldots c_1$ den Index i enthält.

Bei Benutzung der Resultate (I) und (II) übertragen sich die Gleichungen auf die Funktionen C. Man erhält:

$$\frac{\partial C\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1 b_1 \ldots c_1}}{\partial y_{in}} = 0$$

unter denselben Bedingungen. Hieraus folgt:

(III) $$C\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1 b_1 \ldots c_1}$$

ist eine Funktion von

$$y_{an},\ y_{bn},\ldots,y_{cn};\ y_{a_1 n},\ y_{b_1 n},\ldots,y_{c_1 n}$$

allein.

Gruppe III.

$$\frac{2\,\partial^2 F}{\partial y_{ii}\partial y_{nn}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{in}^2} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Benutzt man nach Ausführung der Operationen die Relation § 2 (4) und fasst dann die Determinanten der $(n-\nu)$ten Klasse zusammen, so folgt:

1)
$$2\sum_{\alpha\beta\ldots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}\frac{\partial A\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}}{\partial y_{in}}\,\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ i}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 i}$$
$$+\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1 b_1\ldots c_1}\frac{\partial^2 A\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1 b_1\ldots c_1}}{\partial y_{in}^2}\,\Delta\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1 b_1\ldots c_1} = 0.$$

Die folgenden Rechnungen werden bedeutend vereinfacht durch die Einführung einer neuen Bezeichnung:

1) Das Symbol $a\,b\ldots c\,(i)$ bedeute diejenige Kombination $(\nu-1)$ter Klasse, die aus der Kombination νter Klasse $a\,b\ldots c$ entsteht, wenn man den Index i daraus fortlässt.

2) Das Symbol $[a\,b\ldots c\,(i)]$ habe den Wert 0 oder 1, jenachdem eine gerade oder ungerade Anzahl von Elementen der Kombination $a\,b\ldots c$ grösser ist als i. Dann gilt folgende Identität:

$$(J)\qquad \sum_{\alpha\beta\ldots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}\frac{\partial A\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}}{\partial y_{kn}}\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\,\lambda}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\mu}$$

$$=\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}(-1)^{[a\,b\ldots c\,(\lambda)]+[a_1\,b_1\ldots c_1\,(\mu)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots c\,(\lambda)}{a_1\,b_1\ldots c_1(\mu)}}{\partial y_{kn}}\Delta\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1\,b_1\ldots c_1},$$

wenn λ, k, μ irgend drei Indices aus dem Bereich $1, 2, \ldots, n$ sind, die nicht notwendig verschieden zu sein brauchen.

Beweis der Identität (J):

Nach Festsetzung (II) § 2 liefert ein Kombinationenpaar $a\,b\ldots c$, $a_1\,b_1\ldots c_1$ der rechten Seite nur dann einen von Null verschiedenen Summanden, wenn die Kombination $a\,b\ldots c$ den Index λ, die Kombination $a_1\,b_1\ldots c_1$ den Index μ enthält.

Anstatt aber über alle Kombinationen der νten Klasse zu summieren, die den Index λ enthalten, kann man auch über alle Kombinationen der $(\nu-1)$ten Klasse summieren, die den Index λ nicht enthalten und jedesmal λ hinzufügen. Verfährt man in dieser Weise mit der rechten Seite von (J) und beachtet man gleichzeitig § 2 (2), so geht die rechte Seite in die linke über.

Mit Hülfe der Identität (J) lässt sich die Gleichung (1) umgestalten in:

$$(2)\qquad \sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\left\{2(-1)^{[a\,b\ldots c(i)]+[a_1\,b_1\ldots c_1(i)]}\frac{\partial A\binom{a\,b\ldots c\,(i)}{a_1b_1\ldots c_1(i)}}{\partial y_{nn}}+\frac{\partial^2 A\binom{a\,b\ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}}{\partial y_{in}^2}\right\}\Delta\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}=0.$$

Hieraus folgt:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 A\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1\,b_1\ldots c_1}}{\partial y_{in}^2}=2(-1)^{[a\,b\ldots c(i)]+[a_1\,b_1\ldots c_1(i)]+1}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots c\,(i)}{a_1\,b_1\ldots c_1(i)}}{\partial y_{nn}}.$$

Setzt man in (3) die Ergebnisse (I)—(III) ein, so erhält man:

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 C\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1\,b_1\ldots c_1}}{\partial y_{in}^2}=2(-1)^{[a\,b\ldots c(i)]+[a_1b_1\ldots c_1(i)]+1}B\binom{a\ b\ \ldots c\,(i)}{a_1\,b_1\ldots c_1(i)}.\quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

Da sich im Laufe der Rechnung herausstellen wird, dass sich diese Gleichungen mit den aus Gruppe (IV a) resultierenden zusammenfassen lassen, so ist es zweckmässig, ihre Integration erst mit jenen zusammen vorzunehmen.

Gruppe IV.

a) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}\partial y_{k\mu}}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_{kn}\partial y_{\mu n}}=0. \qquad (k<\mu=1,2,\ldots,n-1)$$

Die Anwendung auf (A) ergiebt bei Benutzung der Relation § 2 (4) und Zusammenfassung der Determinanten der $(n-\nu)$ten Klasse:

(1)
$$\sum_{\alpha\beta\ldots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}\frac{\partial A\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}}{\partial y_{nn}}\left[\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ k}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\mu}+\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ \mu}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k}\right]$$
$$+\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\frac{\partial^2 A\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}}{\partial y_{kn}\partial y_{\mu n}}\Delta\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}=0.$$

Formt man den ersten der beiden Ausdrücke mit Hülfe der Identität (J) um und fasst ihn dann mit dem zweiten zusammen, so erhält man:

(2)
$$\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\left\{(-1)^{[a\,b\ldots c(k)+[a_1b_1\ldots c_1(\mu)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots c(k)}{a_1b_1\ldots c_1(\mu)}}{\partial y_{nn}}\right.$$
$$+(-1)^{[a\,b\ldots c(\mu)]+[a_1b_1\ldots c_1(k)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots c(\mu)}{a_1b_1\ldots c_1(k)}}{\partial y_{nn}}$$
$$\left.+\frac{\partial^2 A\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}}{\partial y_{kn}\partial y_{\mu n}}\right\}\Delta\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}=0.$$

Hieraus folgt:

(3)
$$\frac{\partial^2 A\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}}{\partial y_{kn}\partial y_{\mu n}}=(-1)^{[a\,b\ldots c(k)]+[a_1b_1\ldots c_1(\mu)]+1}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots c(k)}{a_1b_1\ldots c_1(\mu)}}{\partial y_{nn}}$$
$$+(-1)^{[a\,b\ldots c(\mu)]+[a_1b_1\ldots c_1(k)]+1}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots c(\mu)}{a_1b_1\ldots c_1(k)}}{\partial y_{nn}}.$$

Die Einführung der Resultate (I)—(III) endlich ergiebt:

(4)
$$\frac{\partial^2 C\binom{a\ b\ \ldots c}{a_1b_1\ldots c_1}}{\partial y_{kn}\partial y_{\mu n}}=(-1)^{[a\,b\ldots c(k)]+[a_1b_1\ldots c_1(\mu)]+1}B\binom{a\ b\ \ldots c(k)}{a_1b_1\ldots c_1(\mu)}$$
$$+(-1)^{[a\,b\ldots c(\mu)]+[a_1b_1\ldots c_1(k)]+1}B\binom{a\ b\ \ldots c(\mu)}{a_1b_1\ldots c_1(k)}.$$
$$(k<\mu=1,2,\ldots,n-1)$$

Für $k = \mu$ würde dieses Gleichungssystem übergehen in das System (4) aus Gruppe III. Beide Systeme werden daher durch vorstehende Formeln umfasst, wenn man die Bedingung $k < \mu$ ersetzt durch

$$k \leqq \mu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Die Integration der zusammengefassten Systeme ergiebt:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} C\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} (-1)^{[a\,b\ldots\,c(k)]+[a_1 b_1 \ldots\, c_1(\mu)]+1} B\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\,(k) \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1(\mu) \end{pmatrix} y_{kn}\, y_{\mu n} \\ \qquad\qquad + D\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wo die D lineare Funktionen von y_{an}, $y_{bn} \ldots$, $y_{c_1 n}$ sind.

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ii}\, \partial y_{kn}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\, \partial y_{in}} = 0. \qquad (i \neq k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

In derselben Weise wie früher erhält man:

$$\text{(1)} \quad \sum_{\alpha\beta\ldots\gamma} \sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} \frac{\partial A\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma \\ \alpha_1\, \beta_1 \ldots\ \gamma_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{in}} \left[\Delta\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma\ k \\ \alpha_1\, \beta_1 \ldots\ \gamma_1\, i \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma\ i \\ \alpha_1\, \beta_1 \ldots\ \gamma_1 k \end{pmatrix} \right]$$

$$+ \sum_{\alpha\beta\ldots\gamma} \sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} \frac{\partial A\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma \\ \alpha_1\, \beta_1 \ldots\ \gamma_1 \end{pmatrix}}{\partial y_{kn}} \Delta\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma\, i \\ \alpha_1\, \beta_1 \ldots\ \gamma_1 i \end{pmatrix} = 0.$$

Die Umformung mittels der Identität (J) liefert:

$$\sum_{ab\ldots c} \sum_{a_1 b_1 \ldots c_1} \Bigg\{ (-1)^{[a\,b\ldots\,c(i)]+[a_1 b_1 \ldots\, c_1(i)]} \frac{\partial A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\,(i) \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1(i) \end{pmatrix}}{\partial y_{kn}}$$

$$\text{(2)} \quad + (-1)^{[a\,b\ldots\,c(k)]+[a_1 b_1 \ldots\, c_1(i)]} \frac{\partial A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\,(k) \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1(i) \end{pmatrix}}{\partial y_{in}}$$

$$+ (-1)^{[a\,b\ldots\,c(i)]+[a_1 b_1 \ldots\, c_1(k)]} \frac{\partial A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\,(i) \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1(k) \end{pmatrix}}{\partial y_{in}} \Bigg\} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\text{(3)} \quad \frac{\partial A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\,(i) \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1(i) \end{pmatrix}}{\partial y_{kn}} = (-1)^{[a\,b\ldots\,c(k)]+[a_1 b_1 \ldots\, c_1(i)]+1} \frac{\partial A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\,(k) \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1(i) \end{pmatrix}}{\partial y_{in}}$$

$$+ (-1)^{[a\,b\ldots\,c(i)]+[a_1 b_1 \ldots\, c_1(k)]+1} \frac{\partial A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\,(i) \\ a_1\, b_1 \ldots\ c_1(k) \end{pmatrix}}{\partial y_{in}}.$$

Diese Gleichungen übertragen sich zunächst unverändert auf die Funktionen C. Setzt man dann für diese die unter (IV) erhaltenen Werte ein, so ergiebt eine einfache Rechnung, dass sich die Konstanten B mit ihren Koefficienten identisch fortheben, so dass sich die Gleichungen (3) unverändert auf die Funktionen D übertragen. Also ist:

(4)
$$\frac{\partial D\binom{a\ b\ \dots\ c\,(i)}{a_1\,b_1\dots\,c_1(i)}}{\partial y_{in}} = (-1)^{[a\,b\dots\,c(k)]+[a_1\,b_1\dots\,c_1(i)]+1}\frac{\partial D\binom{a\ b\ \dots\ c\,(k)}{a_1\,b_1\dots\,c_1(i)}}{\partial y_{in}}$$
$$+(-1)^{[a\,b\dots\,c(i)]+[a_1\,b_1\dots\,c_1(k)]+1}\frac{\partial D\binom{a\ b\ \dots\ c\,(i)}{a_1\,b_1\dots\,c_1(k)}}{\partial y_{in}}.$$

Die D sind lineare Funktionen der $y_{k\lambda}$. Man kann daher setzen:

(V)
$$D\binom{a\ b\ \dots\ c}{a_1\,b_1\dots\,c_1} = \sum_{\lambda=1}^{n}(-1)^{[a\,b\dots\,c(\lambda)]}\overset{\lambda}{E}\binom{a\ b\ \dots\ c}{a_1\,b_1\dots\,c_1}y_{\lambda n}$$
$$+\sum_{\lambda_1=1}^{n}(-1)^{[a_1\,b_1\dots\,c_1(\lambda_1)]}\underset{\lambda_1}{E}\binom{a\ b\ \dots\ c}{a_1\,b_1\dots\,c_1}y_{\lambda_1 n}+F\binom{a\ b\ \dots\ c}{a_1\,b_1\dots\,c_1},$$

wenn man noch bestimmt:

$$\overset{\lambda}{E}\binom{a\ b\ \dots\ c}{a_1\,b_1\dots\,c_1} = 0 \qquad \text{für } a,\ b,\ \dots,\ c,\ \neq \lambda$$

und

$$\underset{\lambda_1}{E}\binom{a\ b\ \dots\ c}{a_1\,b_1\dots\,c_1} = 0 \qquad \text{für } a_1, b_1, \dots, c_1, \neq \lambda_1.$$

Es ist in dieser Schreibweise

$$\frac{\partial D\binom{\alpha\ \beta\ \dots\ \gamma\ \lambda}{\alpha_1\,\beta_1\dots\,\gamma_1\lambda}}{\partial y_{\lambda n}} = (-1)^{(\alpha\,\beta\dots\,\gamma\,\lambda)}\overset{\lambda}{E}\binom{\alpha\ \beta\ \dots\ \gamma\ \lambda}{\alpha_1\,\beta_1\dots\,\gamma_1\lambda}+(-1)^{(\alpha_1\,\beta_1\dots\,\gamma_1\,\lambda)}\underset{\lambda}{E}\binom{\alpha\ \beta\ \dots\ \gamma\ \lambda}{\alpha_1\,\beta_1\dots\,\gamma_1\lambda}$$

der konstante Koeffizient von $y_{\lambda n}$ in $D\binom{\alpha\ \beta\ \dots\ \gamma\ \lambda}{\alpha_1\,\beta_1\dots\,\gamma_1\lambda}$. Dieser hat also die Form einer Summe von zwei Konstanten, über deren eine man daher ganz willkürlich verfügen kann, was bald von Wichtigkeit werden wird. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial D\binom{a\ b\ \dots\ c\,(i)}{a_1\,b_1\dots\,c_1(i)}}{\partial y_{kn}} = (-1)^{[a\,b\dots\,c\,(k)]+(i\,k)}\overset{k}{E}\binom{a\ b\ \dots\ c\,(i)}{a_1\,b_1\dots\,c_1(i)}$$
$$+(-1)^{[a_1\,b_1\dots\,c_1\,(k)]+(i\,k)}\underset{k}{E}\binom{a\ b\ \dots\ c\,(i)}{a_1\,b_1\dots\,c_1(i)}$$

$$\frac{\partial D\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (k) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ (i)\end{pmatrix}}{\partial y_{ik}} = (-1)^{[a\,b\dots c(i)]+(ki)}\overset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (k) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ (i)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial D\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ (k)\end{pmatrix}}{\partial y_{ik}} = (-1)^{[a_1\,b_1\dots c_1(i)]+(ki)}\underset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ (k)\end{pmatrix}.$$

Setzt man diese Werte in (4) ein, so erhält man, da

$$(-1)^{(ki)} = (-1)^{(ik)+1}$$

ist:

$$(5)\quad \begin{aligned}&(-1)^{[a\,b\dots c(k)]}\overset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1(i)\end{pmatrix}+(-1)^{[a_1\,b_1\dots c_1(k)]}\underset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1(i)\end{pmatrix}\\ &= (-1)^{[a\,b\dots c(k)]}\overset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (k) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ (i)\end{pmatrix}+(-1)^{[a_1\,b_1\dots c_1(k)]}\underset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1(k)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ist k nur in einer der beiden Kombinationen $a, b, \dots, c$ resp. $a_1, b_1, \dots, c_1$ enthalten, so fliessen aus (5) die Relationen:

$$(6)\quad \begin{aligned}&\overset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ (i)\end{pmatrix} = \overset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (k) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ (i)\end{pmatrix} \qquad (i \neq k = 1, 2, \dots, n-1)\\ &\underset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1(i)\end{pmatrix} = \underset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ (i) \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1(k)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ist k dagegen in beiden Kombinationen enthalten, so kann man eine der beiden Relationen (6) willkürlich festsetzen, und die andere folgt dann aus (5). Die Gleichungen (6) gelten also allgemein.

Das System von Gleichungen (6) wird umfasst von dem System:

$$(7)\quad \begin{aligned}&\overset{\lambda}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ \lambda \\ \alpha_1\ \beta_1 \dots\ \gamma_1\end{pmatrix} = \overset{\mu}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ \mu \\ \alpha_1\ \beta_1 \dots\ \gamma_1\end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \neq a, b, \dots, c)\\ &\underset{\lambda}{E}\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \dots\ \gamma \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ \lambda\end{pmatrix} = \underset{\mu}{E}\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \dots\ \gamma \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ \mu\end{pmatrix}, \qquad (\lambda, \mu \neq a_1, b_1, \dots, c_1)\end{aligned}$$

doch sind nur diejenigen Gleichungen des Systems (7) auch in (6) enthalten, bei denen einer der beiden Indices λ oder μ unter in den Kombinationen $a\ b\ \dots\ c$, $\alpha_1\ \beta_1\ \dots\ \gamma_1$ resp. $\alpha\ \beta\ \dots\ \gamma$, $a_1\ b_1\ \dots\ c_1$ nicht vorkommt.

Das System (7) lässt sich in allgemeinster Weise befriedigen, indem man setzt:

$$(VI)\quad \begin{aligned}&\overset{\lambda}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ \lambda \\ \alpha_1\ \beta_1 \dots\ \gamma_1\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ \alpha_1\ \beta_1 \dots\ \gamma_1\end{pmatrix} \qquad (\lambda \neq a, b, \dots, c)\\ &\underset{\lambda}{E}\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \dots\ \gamma \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\ \lambda\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1 \dots\ c_1\end{pmatrix}. \qquad (\lambda \neq a_1, b_1, \dots, c_1)\end{aligned}$$

Das System (VI) ist daher auch die allgemeinste Lösung des Systemes (6), wenn man die Beschränkung hinzufügt, dass nicht alle Indices 1, 2, . . ., n in $a\ b\ \ldots\ c,\ \alpha_1\ \beta_1\ \ldots\ \gamma_1$, bezw. $\alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma,\ a_1\ b_1\ \ldots\ c_1$ vorkommen sollen.

Gruppe V.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu n}}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_{k\mu}\partial y_{in}}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\mu}\partial y_{kn}}=0.\quad (i<k<\mu=1,2,\ldots,n-1)$$

Hieraus folgt in der bekannten Weise:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\beta\ldots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}\frac{\partial A\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}}{\partial y_{\mu n}}\left[\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ i}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k}+\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ k}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 i}\right]\\
&+\sum_{\alpha\beta\ldots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}\frac{\partial A\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}}{\partial y_{in}}\left[\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ k}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\mu}+\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ \mu}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k}\right]\\
&+\sum_{\alpha\beta\ldots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}\frac{\partial A\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}}{\partial y_{kn}}\left[\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ \mu}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 i}+\Delta\binom{\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ i}{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\mu}\right]=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Formt man die linke Seite von (1) mit Hülfe der Identität (J) um und setzt dann den Koeffizienten von $\Delta\binom{a\ b\ \ldots\ c}{a_1\ b_1\ldots\ c_1}$ gleich Null, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{[a\,b\ldots c(i)]+[a_1 b_1\ldots c_1(k)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots\ c\,(i)}{a_1 b_1\ldots\ c_1(k)}}{\partial y_{\mu n}}\\
&+(-1)^{[a\,b\ldots c(k)]+[a_1 b_1\ldots c_1(i)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots\ c\,(k)}{a_1 b_1\ldots\ c_1(i)}}{\partial y_{\mu n}}\\
&+(-1)^{[a\,b\ldots c(k)]+[a_1 b_1\ldots c_1(\mu)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots\ c\,(k)}{a_1 b_1\ldots\ c_1(\mu)}}{\partial y_{in}}\\
&+(-1)^{[a\,b\ldots c(\mu)]+[a_1 b_1\ldots c_1(k)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots\ c\,(\mu)}{a_1 b_1\ldots\ c_1(k)}}{\partial y_{in}}\\
&+(-1)^{[a\,b\ldots c(\mu)]+[a_1 b_1\ldots c_1(i)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots\ c\,(\mu)}{a_1 b_1\ldots\ c_1(i)}}{\partial y_{kn}}\\
&+(-1)^{[a\,b\ldots c(i)]+[a_1 b_1\ldots c_1(\mu)]}\frac{\partial A\binom{a\ b\ \ldots\ c\,(i)}{a_1 b_1\ldots\ c_1(\mu)}}{\partial y_{kn}}=0.
\end{aligned}\tag{2}$$

Die Gleichungen (2) übertragen sich zunächst unverändert auf die Funktionen C und dann, da die Konstanten B mit ihren Koeffizienten sich identisch aus der Relation herausheben, auf die Funktionen D. Setzt man für diese dann die Werte aus (V) ein, so erhält man bei paarweiser Zusammenfassung der Summanden das System (𝔖):

$$(-1)^{[a\,b\,\ldots\,c(i)]+[a\,b\,\ldots\,c(\mu)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(k)]}\left[(-1)^{(i\mu)}\overset{\mu}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (i)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(k)\end{pmatrix}+(-1)^{(\mu i)}\overset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (\mu)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(k)\end{pmatrix}\right]$$

$$+(-1)^{[a\,b\,\ldots\,c(k)]+[a\,b\,\ldots\,c(i)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(\mu)]}\left[(-1)^{(ki)}\overset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (k)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(\mu)\end{pmatrix}+(-1)^{(ik)}\overset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (i)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(\mu)\end{pmatrix}\right]$$

$$+(-1)^{[a\,b\,\ldots\,c(\mu)]+[a\,b\,\ldots\,c(k)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(i)]}\left[(-1)^{(\mu k)}\overset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (\mu)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(i)\end{pmatrix}+(-1)^{(k\mu)}\overset{\mu}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (k)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(i)\end{pmatrix}\right]$$

$$+(-1)^{[a\,b\,\ldots\,c(i)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(k)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(\mu)]}\left[(-1)^{(k\mu)}\underset{\mu}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (i)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(k)\end{pmatrix}+(-1)^{(\mu k)}\underset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (i)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(\mu)\end{pmatrix}\right]$$

$$+(-1)^{[a\,b\,\ldots\,c(k)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(\mu)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(i)]}\left[(-1)^{(\mu i)}\underset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (k)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(\mu)\end{pmatrix}+(-1)^{(i\mu)}\underset{\mu}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (k)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(i)\end{pmatrix}\right]$$

$$+(-1)^{[a\,b\,\ldots\,c(\mu)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(i)]+[a_1 b_1 \ldots c_1(k)]}\left[(-1)^{(ik)}\underset{k}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (\mu)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(i)\end{pmatrix}+(-1)^{(ki)}\underset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (\mu)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(k)\end{pmatrix}\right]=0.$$

Sind die in diesen Gleichungen vorkommenden Konstanten E solche, die den eingeschränkten Gleichungen (VI) genügen, so verschwinden alle Ausdrücke in den eckigen Klammern identisch, denn dann ist nach (VI):

$$\overset{\mu}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (i)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(k)\end{pmatrix}=\overset{i}{E}\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots\ c\ (\mu)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(k)\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c(i\mu)\\ a_1 b_1 \ldots c_1(k)\end{pmatrix}\text{ etc.}$$

Nur dann ist dies nicht der Fall, wenn das Kombinationenpaar $a\ b\ \ldots\ c$, $a_1\ b_1\ \ldots\ c_1$ die Indices i, k, μ zweimal, alle übrigen mindestens einmal enthält. Nur in diesem Falle ist also das System (𝔖) nicht schon eine Folge der Gleichungen (VI).

Ist das System von (VI) unabhängig, so ist:

(VII)
$$\overset{\lambda}{E}\begin{pmatrix} \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \ldots \mathfrak{c}\,\lambda\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix} \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \ldots \mathfrak{c}\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\lambda}{E}\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma\\ \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\ldots\mathfrak{c}_1\lambda\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma\\ \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\ldots\mathfrak{c}_1\end{pmatrix}\qquad(\lambda=1,2,\ldots,n-1)$$

eine Lösung von (𝔖), wo $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \ldots\ \mathfrak{c}$, $\alpha_1\ \beta_1\ \ldots\ \gamma_1$ bezw. $\alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma$, $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \ldots\ \mathfrak{c}_1$ alle Indices 1, 2, . . ., $n-1$ enthalten.

Es bleibt zu beweisen, dass diese Lösung eine erlaubte ist, d. h. dass dadurch nicht mehr Relationen zwischen den konstanten Koeffizienten der $y_{\lambda i}$ in den Funktionen D hergestellt werden, als durch das System von Differentialgleichungen (Σ_n) bedingt werden.

Es ist mir nicht gelungen, diese Frage in dem allgemeinen Fall, dass die Anzahl der Variabeln $v = n$ ist, zu beantworten. Ihre Zurückführung auf ein bestimmtes algebraisches Problem, sowie ihre Erledigung für die Fälle $n = 4$, 5, 6, 7 soll in § 5 geleistet werden.

Hier sei vorläufig angenommen, dass sie sich in bejahendem Sinne beantworten lasse, und es mögen die Konsequenzen aus dieser Annahme gezogen werden. Es wäre dann die Integration des Systemes (Σ_n) in allgemeinster Weise geleistet, und die Einsetzung der Resultate in den Ausdruck (A) würde die allgemeinste Lösung des Systemes (S_n) liefern.

Ordnet man diese Lösung nach den in ihr auftretenden Konstanten F, G und B, so wird:

1) der Koeffizient von $F\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}$ gleich $\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}$

oder, wenn man die Determinanten jetzt als Subdeterminanten der symmetrischen Determinante $n$ten Grades

$$\nabla = | y_{11}\, y_{22} \dots y_{nn} |$$

auffasst und deren Subdeterminanten entsprechend bezeichnet, gleich

$$\nabla\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & n \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & n \end{pmatrix}.$$

Es wird:

2) der Koeffizient von $G\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \gamma \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}$ gleich

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1}(-1)^{(\alpha\beta\dots\gamma\lambda)}y_{\lambda n}(-1)^{(\alpha\beta\dots\gamma\lambda)}\Delta\begin{pmatrix} \alpha & \beta & .. & \gamma & \lambda \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{n}\nabla\begin{pmatrix} \alpha & \beta & .. & \gamma & n & \lambda \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & n \end{pmatrix}y_{\lambda n} = -\nabla\begin{pmatrix} \alpha & \beta & .. & \gamma & n \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix} \text{ (cfr. § 2 (3)).}$$

Es wird:

3) der Koeffizient von $B\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}$ gleich

$$y_{nn}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix} - \sum_{\lambda=1}^{n-1}\sum_{\lambda_1=1}^{n-1}(-1)^{2(ab\dots c\lambda)+2(a_1b_1\dots c_1\lambda_1)}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \lambda \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}y_{\lambda n}y_{\lambda_1 n}$$

$$= y_{nn}\nabla\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & n \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & n \end{pmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{n-1}y_{\lambda n}\sum_{\lambda_1=1}^{n}\nabla\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \lambda & n \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & n & \lambda_1 \end{pmatrix}y_{\lambda_1 n}$$

$$= y_{nn}\nabla\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & n \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & n \end{pmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{n-1}\nabla\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \lambda \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & n \end{pmatrix}y_{\lambda n} = \sum_{\lambda=1}^{n}\nabla\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \lambda \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & n \end{pmatrix}y_{\lambda n} = \nabla\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist bewiesen:

Ist die Lösung des Gleichungensystems (𝔖) zwischen den Konstanten E in der angegebenen Weise erlaubt, so ist die allgemeinste Lösung des Systems (S) von Differentialgleichungen eine lineare Funktion der symmetrischen Determinante

$$\nabla = | y_{11} y_{22} \cdots y_{nn} |$$

und ihrer sämtlichen Subdeterminanten.

---

§ 5.

Das Gleichungensystem (𝔖).

Zur Prüfung der Frage, ob die Erfüllung des Gleichungensystemes (𝔖) zwischen den Konstanten E in der im vorigen § angegebenen Weise gestattet ist, diene folgende Ueberlegung.

Die Konstanten E einzeln genommen haben keinerlei Bedeutung in der Lösung des Systemes (S_n). Erst gewisse Summen der E haben eine solche. Es war nämlich:

$$(-1)^{(\alpha\beta\ldots\gamma k)} \overset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\end{pmatrix} + (-1)^{(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k)} \underset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\end{pmatrix}$$

der konstante Koeffizient von y_{kn} in

$$D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\end{pmatrix}$$

und

$$(-1)^{(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k)} \overset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\\ \alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\end{pmatrix} + (-1)^{(\alpha\beta\ldots\gamma k)} \underset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\\ \alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\end{pmatrix}$$

der Koeffizient von y_{kn} in

$$D\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\\ \alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\end{pmatrix}.$$

Da nun die Gleichung gilt:

$$D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & k\\ \alpha & \beta & \ldots & \gamma & k\end{pmatrix},$$

so hat erst die Summe

$$(\mathrm{I})\quad \underset{k}{H}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \dots & \gamma & k\\ \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \gamma_1 & k\end{pmatrix} = (-1)^{(\alpha\beta\dots\gamma k)}\underset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \dots & \gamma & k\\ \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \gamma_1 & k\end{pmatrix} + (-1)^{(\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k)}\underset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \dots & \gamma & k\\ \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \gamma_1 & k\end{pmatrix}$$
$$+(-1)^{(\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k)}\underset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \dots & \gamma_1 & k\\ \alpha & \beta & \dots & \gamma & k\end{pmatrix} + (-1)^{(\alpha\beta\dots\gamma k)}\underset{k}{E}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \dots & \gamma_1 & k\\ \alpha & \beta & \dots & \gamma & k\end{pmatrix}$$

eine wirkliche Bedeutung. Die Grössen H sind die eigentlichen in den linearen Funktionen D auftretenden Konstanten. Doch ist hier, damit die H nicht wieder doppelt als $\underset{k}{H}\begin{pmatrix}a & b & \dots & c\\ a_1 & b_1 & \dots & c_1\end{pmatrix}$ und $\underset{k}{H}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & \dots & c_1\\ a & b & \dots & c\end{pmatrix}$ gezählt werden, noch folgende Festsetzung zu treffen:

Von zwei zu einem H gehörigen, in der natürlichen Reihenfolge geordneten Indexkombinationen soll diejenige als die obere geschrieben werden, in der zuerst ein Index kleiner ist als der gleichstellige der anderen.

Die Konstanten H genügen dann wegen der in § 4, Gruppe V zwischen den Funktionen D gefundenen Beziehungen den Relationen:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{aligned}
&(-1)^{[a\,b\dots c(i)]+[a_1 b_1\dots c_1(k)]}\underset{\mu}{H}\begin{pmatrix}a & b & \dots & c\,(i)\\ a_1 & b_1 & \dots & c_1(k)\end{pmatrix}\\
&+(-1)^{[a\,b\dots c(k)]+[a_1 b_1\dots c_1(i)]}\underset{\mu}{H}\begin{pmatrix}a & b & \dots & c\,(k)\\ a_1 & b_1 & \dots & c_1(i)\end{pmatrix}\\
&+(-1)^{[a\,b\dots c(k)]+[a_1 b_1\dots c_1(\mu)]}\underset{i}{H}\begin{pmatrix}a & b & \dots & c\,(k)\\ a_1 & b_1 & \dots & c_1(\mu)\end{pmatrix}\\
&+(-1)^{[a\,b\dots c(\mu)]+[a_1 b_1\dots c_1(k)]}\underset{i}{H}\begin{pmatrix}a & b & \dots & c\,(\mu)\\ a_1 & b_1 & \dots & c_1(k)\end{pmatrix}\\
&+(-1)^{[a\,b\dots c(\mu)]+[a_1 b_1\dots c_1(i)]}\underset{k}{H}\begin{pmatrix}a & b & \dots & c\,(\mu)\\ a_1 & b_1 & \dots & c_1\,(i)\end{pmatrix}\\
&+(-1)^{[a\,b\dots c(i)]+[a_1 b_1\dots c_1(\mu)]}\underset{k}{H}\begin{pmatrix}a & b & \dots & c\,(i)\\ a_1 & b_1 & \dots & c_1(\mu)\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Da die Indices i, k, μ ganz beliebig sind, braucht bei der Aufstellung der Relationen zwischen den H in dieser allgemeinen Form keine Rücksicht auf die eben getroffene Festsetzung genommen zu werden. Diese ist aber zu beachten, wenn man die Relationen wirklich hinschreibt.

Jede beliebige Lösung des Systemes (S) zwischen den Konstanten E stellt in die Gleichungen (I) eingesetzt zwischen den Konstanten H die Relationen (II) her; denn das System (S) umfasst das System (II). Eine Lösung des Systemes (S) ist dann eine erlaubte, wenn ihr die allgemeine Lösung des Systemes (II) entspricht, d. h. wenn sie in (I) eingesetzt keine von (II) unabhängige Relation zur Folge hat.

Die Lösung § 4 (VII) ist also dann eine erlaubte, wenn das System

$$(\mathrm{III})\begin{cases} H_k\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \dots\ \gamma\ k\\ \alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k\end{pmatrix} = (-1)^{(\alpha\beta\dots\gamma k)}G\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\dots\gamma\\ \alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k\end{pmatrix}+(-1)^{(\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k)}G\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1\\ \alpha\ \beta\ \dots\gamma k\end{pmatrix} \\ \qquad +(-1)^{(\alpha\beta\dots\gamma k)}G\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k\\ \alpha\ \beta\ \dots\gamma\end{pmatrix}+(-1)^{(\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k)}G\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \dots\gamma k\\ \alpha_1\beta_1\dots\gamma_1\end{pmatrix}, \end{cases}$$

das durch Einsetzen dieser Lösung in (I) entsteht, zwischen den Grössen H keine von (II) unabhängige Relation herstellt.

Die beiden letzten Summanden eines jeden H sind völlig symmetrisch zu den beiden ersten gestaltet. Enthält ein H irgend ein $G\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\dots\gamma\\ a_1\ b_1\dots c_1\end{pmatrix}$, so enthält es auch $G\begin{pmatrix}a_1\ b_1\dots c_1\\ \alpha\ \beta\dots\gamma\end{pmatrix}$, und zwar mit demselben Vorzeichen. Daraus folgt:

Mit Bezug auf die Relationen zwischen den H, auf die es hier nur ankommt, kann man das System (III) durch das einfachere ersetzen:

$$(\mathrm{IV})\quad H_k\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \dots\ \gamma\ k\\ \alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k\end{pmatrix} = (-1)^{(\alpha\beta\dots\gamma k)}G\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\dots\gamma\\ \alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k\end{pmatrix}+(-1)^{(\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1 k)}G\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1\\ \alpha\ \beta\ \dots\gamma k\end{pmatrix}.$$

Es ist dann also nachzuweisen, dass das System (IV) keine von (II) unabhängige Relation zur Folge hat oder, was dasselbe ist, dass die Anzahl der aus (IV) resultierenden, unabhängigen Beziehungen zwischen den H nicht grösser ist als die Anzahl der unabhängigen unter den Gleichungen (II). Mit Hülfe der Jacobischen Criterien für die Abhängigkeit von Gleichungen bezw. Funktionen lässt sich dem Problem endlich folgende Fassung geben:

Man bilde folgende beide Matricen:

1) die zu (II) gehörige Matrix,

2) die Funktionalmatrix, die zu (IV) gehört, wenn man die H als Funktionen der G betrachtet.

Dann ist zu beweisen: Es lässt sich eine Zahl ϱ so bestimmen, dass gleichzeitig eine Determinante ϱten Grades der Matrix (1) und eine Determinante $(\lambda-\varrho)$ten Grades der Matrix (2) nicht verschwindet, wo λ die Anzahl der Gleichungen (IV) ist; denn wenn die Bestimmung einer solchen Zahl ϱ möglich ist, so sind:

1) mindestens ϱ der Gleichungen (II) von einander unabhängig,

2) höchstens ϱ der aus (IV) resultierenden Relationen unabhängig, und folglich ist dann die in der vorigen Fassung des Problemes aufgestellte Bedingung erfüllt.

Auch dieses Problem lässt sich noch auf ein einfacheres zurückführen. Es wird indessen von Interesse sein, wenn vorher einige Bemerkungen über die Anzahl der zu einem gegebenen n und ν gehörigen Grössen H und G, sowie der Gleichungen (II) eingeschoben werden, da diese Zahlen im Folgenden wiederholt vorkommen und auch bei einer wirklichen Aufstellung der Matricen nötig sind.

Es bedeutet hier ν die Klassenzahl der die Grössen H und G charakterisierenden Indexkombinationen.

Alle Grössen H, um die es sich hier handelt, enthalten sämtliche Indices $1, 2, \ldots, n-1$, da nur in diesem Falle die Relationen der Gruppe (V) nicht schon eine Folge der Relationen der Gruppe (IV) waren.

Die zu einem gegebenen n und ν gehörigen H mögen ϑ Indices zweimal, 2ε Indices einmal enthalten.

Dann hat man die Gleichungen:

$$2\varepsilon+\vartheta = n-1,\ 2\varepsilon+2\vartheta = 2\nu,$$

aus denen folgt:

$$\vartheta = 2\nu-n+1,\ \varepsilon = n-\nu-1;$$

ε und ϑ müssen beide grösser als 1 sein, da sonst überhaupt keine Relation (II) möglich ist, die nicht schon eine Folge der Relationen aus Gruppe (IV) wäre. Daher hat man Grössen H und Relationen (IV) nur in den Grenzen

$$n-2 \geqq \nu \geqq \frac{n}{2}$$

zu beachten. Die Anzahl der Grössen H ist, wie man leicht sieht,

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\vartheta\binom{n-1}{2\varepsilon}\binom{2\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Die Anzahl der Grössen G ist:

$$k = \binom{n-1}{2\varepsilon+1}\binom{2\varepsilon+1}{\varepsilon}.$$

Die Anzahl der Relationen (II) ist:

a) $$\mu = \tfrac{1}{2}\binom{n-1}{3}\binom{n-4}{2\varepsilon-2}\binom{2\varepsilon-2}{\varepsilon-1}, \qquad (\varepsilon>1)$$

b) $$\mu = \binom{n-1}{3}. \qquad (\varepsilon = 1)$$

Durch einfache Umrechnung erhält man hieraus:

1) $$\lambda = \tfrac{1}{2}\sigma$$

2) $$k = \frac{1}{\varepsilon+1}\sigma$$

3)

a) $$\mu = \frac{1}{2.3!}\varepsilon^2\sigma \qquad (\varepsilon>1)$$

b) $$\mu = \frac{\varepsilon^2}{3!}\sigma \qquad (\varepsilon = 1)$$

wo

$$\sigma = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-2\varepsilon-1)}{(\varepsilon!)^2}$$

ist.

Nach diesem Exkurse sollen die folgenden beiden Sätze bewiesen werden:

Satz 1: Wenn $\varepsilon = 1$ ist, so stellen die Gleichungen (IV) zwischen den H gerade nur die Relationen (II) her.

Beweis: Wenn $\varepsilon = 1$ ist, so gilt folgendes:

a) Es ist $\lambda = k$, und folglich kommt jedes G in den Gleichungen (IV) nur 2mal vor.

b) Jedes H kommt nur in einer einzigen Relation (II) vor.

Aus (b) folgt, dass die Gleichungen (IV) sich eindeutig in Gruppen so ordnen lassen, dass immer die zu einer Relation (II) gehörigen H in einer Gruppe stehen. Jede dieser Gruppen enthält dann jedes in ihr vorkommende G notwendigerweise zweimal; denn sonst könnten die Gleichungen (II) nicht folgen. Irgend zwei H, die in verschiedenen Gruppen stehen, haben dagegen wegen (a) überhaupt kein G gemeinsam. Daraus folgt aber unmittelbar, dass von (II) unabhängige Relationen aus (IV) nicht resultieren.

Satz 2: Wenn $\varepsilon > 1$ ist, so stellen die Gleichungen (II) gerade $\lambda - k$ unabhängige Relationen zwischen den H her; oder mit andern Worten: es giebt stets eine Determinante $k$ten Grades der Matrix (2) von λ Zeilen und k Spalten, die von Null verschieden ist.

Beweis: In den Gleichungen (IV) sind λ Grössen H ausgedrückt als Funktionen der k Grössen G. Dadurch werden mindestens $\lambda - k$ unabhängige Relationen zwischen den H hergestellt. Es könnten aber auch mehr dadurch hergestellt werden. Letzteres wäre immer dann und nur dann der Fall, wenn die H im Grunde nicht Funktionen der k unabhängigen Grössen G, sondern von k' ($k' < k$) unabhängigen Grössen G' wären. Die G' wären dann ihrerseits lineare unabhängige Funktionen der G.

Da die Anzahl der G' kleiner ist als die der G, sind sicher nicht alle G Funktionen der G'. Wegen der Gleichberechtigung der G in (IV) kann man sich ferner die G' stets so gewählt denken, dass irgend ein bestimmtes G keine Funktion der G' ist. Hieraus folgt aber:

Liegt der angenommene Fall wirklich vor und setzt man ein beliebiges G in den Gleichungen (IV) gleich Null, so folgt daraus keine Relation zwischen den wirklichen Unabhängigen G' dieser Gleichungen. Dann kann aber auch keine neue Relation zwischen den H daraus resultieren.

Dies lässt sich umgekehrt so aussprechen: Setzt man in den Gleichungen (IV) ein beliebiges G gleich Null und erhält dadurch eine neue Relation zwischen den H, so liegt der angenommene Fall nicht vor. Die k Grössen G sind dann selbst die eigentlichen Unabhängigen der Gleichungen (IV), und aus (IV) folgen daher gerade $\lambda - k$ unabhängige Relationen zwischen den H. Aus der Be-

dingung

$$n-2 \geqq \nu \geqq \frac{n}{2}$$

und dem für ε gefundenen Werte folgt, dass ε höchstens gleich 1 ist für $n<6$. Ist aber

$$n \geqq 6 \text{ und } \varepsilon \geqq 2,$$

so kommen unter (IV) stets die folgenden 5 Gleichungen vor:

$$\begin{aligned}
H_1\begin{pmatrix}\dots 1\,2\,4\\ \dots 1\,3\,5\end{pmatrix} &= (-1)^{\nu-s}\left[\; G\begin{pmatrix}\dots 2\,4\\ \dots 1\,3\,5\end{pmatrix}+G\begin{pmatrix}\dots 3\,5\\ \dots 1\,2\,4\end{pmatrix}\right]\\
H_2\begin{pmatrix}\dots 2\,1\,3\\ \dots 2\,4\,5\end{pmatrix} &= (-1)^{\nu-s}\left[-G\begin{pmatrix}\dots 1\,3\\ \dots 2\,4\,5\end{pmatrix}+G\begin{pmatrix}\dots 4\,5\\ \dots 1\,2\,3\end{pmatrix}\right]\\
H_3\begin{pmatrix}\dots 3\,1\,2\\ \dots 3\,4\,5\end{pmatrix} &= (-1)^{\nu-s}\left[\; G\begin{pmatrix}\dots 1\,2\\ \dots 3\,4\,5\end{pmatrix}+G\begin{pmatrix}\dots 4\,5\\ \dots 1\,2\,3\end{pmatrix}\right]\\
H_4\begin{pmatrix}\dots 4\,1\,2\\ \dots 4\,3\,5\end{pmatrix} &= (-1)^{\nu-s}\left[-G\begin{pmatrix}\dots 3\,5\\ \dots 1\,2\,4\end{pmatrix}+G\begin{pmatrix}\dots 1\,2\\ \dots 3\,4\,5\end{pmatrix}\right]\\
H_5\begin{pmatrix}\dots 5\,1\,3\\ \dots 5\,2\,4\end{pmatrix} &= (-1)^{\nu-s}\left[\; G\begin{pmatrix}\dots 1\,3\\ \dots 2\,4\,5\end{pmatrix}+G\begin{pmatrix}\dots 2\,4\\ \dots 1\,3\,5\end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Die Punkte bedeuten hier irgend 2 bestimmte Konbinationen, die alle Indices 6, 7, . . ., $n-1$ enthalten.

Zwischen diesen H besteht keine lineare Relation; denn setzt man eine solche an, indem man die 5 Gleichungen der Reihe nach mit $a_1, a_2, \dots, a_5$ multipliziert, so erhält man:

$$a_1+a_5 = 0,\ a_1-a_4 = 0,\ -a_2+a_5 = 0,\ a_2+a_3 = 0,\ a_3+a_4 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$a_1 = -a_5 = a_4 = -a_2 = a_3 = -a_4 = 0$$

Setzt man dagegen irgend eines der in obigen Gleichungen vorkommenden G gleich Null, so fällt eine der 5 Relationen zwischen den a fort, und diese sind jetzt mit einander verträglich. Es entsteht also eine neue Relation zwischen den H, wenn man ein einziges der G gleich Null setzt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Durch den Satz 1 ist die im Anfange des Paragraphen aufgeworfene Frage für die Fälle $n \leqq 5$ in bejahendem Sinne beantwortet, da dann, wie bereits erwähnt, ε höchstens gleich 1 ist.

Durch Satz 2 ist sie für

$$n \geqq 6;\ \varepsilon \geqq 2$$

auf folgende zurückgeführt:

Ist je eine Determinante $(\lambda-k)$ten Grades der für $\nu = \left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}+1\right] \ldots, n-2$ aufgestellten Matricen (2) verschieden von Null?

Ist diese Frage in positivem Sinne zu beantworten, so ist die Lösung § 4 (VII) des Gleichungensystemes (Ⓢ) eine erlaubte, und folglich die gefundene Lösung des Systemes (S_n) von Differentialgleichungen die allgemeinste. Würde es sich dagegen herausstellen, dass für $n = m$ die Frage negativ zu beantworten ist, während sie für $n = 1, 2, \ldots, m-1$ zu bejahen ist, so würde das bedeuten, dass für $n = m$ die gefundene Lösung des Systemes (S) nicht mehr die allgemeinste ist, sondern eine partikuläre. Diese wäre dadurch zu Stande gekommen, dass zwischen den konstanten Koeffizienten willkürlich mehr Relationen festgesetzt wurden, als die Differentialgleichungen des Systemes (S) es erforderten.

Für

$$n = 6$$

ist die Frage leicht zu entscheiden.

Die Bedingung

$$n-2 \geqq \nu \geqq \frac{n}{2}$$

liefert

$$\nu = 4, \ \nu = 3.$$

Für $\nu = 4$ erhält man $\varepsilon = 1$. Dieser Fall ist durch Satz 1 erledigt.
Für $\nu = 3$ erhält man $\varepsilon = 2$ und hieraus

$$\lambda = 15, \ k = 10, \ \mu = 10, \ \lambda - k = 5.$$

In der Tabelle auf Seite 31 ist die zu $n = 6$, $\nu = 3$ gehörige 10zeilige und 15 spaltige Matrix der Gleichungen (IV) aufgestellt. Es ist leicht zu beweisen, dass nicht alle Determinanten fünften Grades verschwinden. Bei der stark umrahmten Determinante erkennt man dies unmittelbar. Damit ist die Richtigkeit der Lösung für $n = 6$ bewiesen.

Dann gilt sie aber auch für $n = 7$; denn ε kann dann ebenfalls nur die Werte 1 und 2 haben. Der erste Fall ist allgemein erledigt. Im zweiten kann man das System (IV) in 6 Gruppen ordnen, die vollständig unabhängig von einander sind, und deren jede den Gleichungen für $n = 6$, $\varepsilon = 2$ ganz analog gebaut ist.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		$H\binom{1\,2\,3}{1\,4\,5}$	$H\binom{1\,2\,4}{1\,3\,5}$	$H\binom{1\,2\,5}{1\,3\,4}$	$H\binom{2\,1\,3}{2\,4\,5}$	$H\binom{2\,1\,4}{2\,3\,5}$	$H\binom{2\,1\,5}{2\,3\,4}$	$H\binom{3\,1\,2}{3\,4\,5}$	$H\binom{3\,1\,4}{3\,2\,5}$	$H\binom{3\,1\,5}{3\,2\,4}$	$H\binom{4\,1\,2}{4\,3\,5}$	$H\binom{4\,1\,3}{4\,2\,5}$	$H\binom{4\,1\,5}{4\,2\,3}$	$H\binom{5\,1\,2}{5\,3\,4}$	$H\binom{5\,1\,3}{5\,2\,4}$	$H\binom{5\,1\,4}{5\,2\,3}$
1	$\binom{1}{3\,4\,5\;2}$								-1	-1		$+1$	$+1$		-1	-1
2	$\binom{1}{2\,4\,5\;3}$					$+1$	$+1$				$+1$		-1	-1		$+1$
3	$\binom{1}{2\,3\,5\;4}$				$+1$		-1	-1		$+1$				$+1$	$+1$	
4	$\binom{1}{2\,3\,4\;5}$				-1	-1		$+1$	$+1$		-1	-1				
5	$\binom{2}{1\,4\,5\;3}$		-1	-1							-1	-1		$+1$	$+1$	
6	$\binom{2}{1\,3\,5\;4}$	-1		$+1$				$+1$	$+1$					-1		$+1$
7	$\binom{2}{1\,3\,4\;5}$	$+1$	$+1$					-1		$+1$	$+1$		-1			
8	$\binom{3}{1\,2\,5\;4}$	$+1$	$+1$		-1	-1									-1	-1
9	$\binom{3}{1\,2\,4\;5}$	-1		$+1$	$+1$		-1					$+1$	$+1$			
10	$\binom{4}{1\,2\,3\;5}$		-1	-1		$+1$	$+1$		-1	-1						

Das Resultat der gesamten bisherigen Untersuchung sei hier noch einmal zusammengefasst.

Für $n \leqq 7$ ist bewiesen, für $n > 7$ äusserst wahrscheinlich gemacht:

Ist der Differentialausdruck zweiter Ordnung F so beschaffen, dass sein δF sich selbst adjungiert ist, so lässt sich F stets auf die Form bringen:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} F = {} & A\Delta + \sum_{a=1}^{n} \sum_{a_1=1}^{n} A\binom{a}{a_1}\Delta\binom{a}{a_1} + \cdots\cdots\cdots \\ & + \sum_{a\,b\ldots c} \sum_{a_1 b_1 \ldots c_1} A\binom{a\ b\ \ldots\ c}{a_1 b_1 \ldots\ c_1}\Delta\binom{a\ b\ \ldots\ c}{a_1 b_1 \ldots\ c_1} + \cdots + A\binom{1\,2\ldots n}{1\,2\ldots n}, \end{aligned}$$

wo jetzt wieder wie in § 1 $\Delta = |\, y_{11}\, y_{22} \ldots y_{nn}\,|$ ist und die A unabhängig sind von den zweiten Ableitungen y_{kl}.

---

§ 6.

Die Abhängigkeit der Grössen A von $x_1, x_2, \ldots, x_n; y; y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Die Koefficienten der Subdeterminanten in F wurden in den früheren Paragraphen, da es sich dort nur um die Abhängigkeit von den zweiten Ableitungen handelte, der Kürze halber als Konstanten bezeichnet. In Wirklichkeit sind diese Grössen noch Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n; y; y_1, y_1, \ldots, y_n$.

Die Forderung, dass δF sich selbst adjungiert sein soll, liefert für diese Grössen A eine Reihe von Relationen, deren Herleitung uns in diesem Paragraphen beschäftigen soll.

Das Differentialgleichungssystem (S) floss aus den in § 1 aufgestellten Gleichungen:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left[\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}\right](1 + \delta_{ik}) = 2\frac{\partial F}{\partial y_k}; \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

setzt man in diese Gleichungen für F den Wert (A) ein, so erhält man wegen § 2 (4) lineare Funktionen Ψ der Determinante Δ und ihrer Subdeterminanten, die gleich Null zu setzen sind. Diese Relationen sind wie früher in allgemeinster Weise zu befriedigen, indem man den Koeffizienten jeder Determinante gleich Null setzt. Da diese Koeffizienten, wie sich herausstellen wird, Funktionen der A und deren Ableitungen sind, so erhält man auf diese Weise die angekündigten Relationen für die Funktionen A.

Es werde die Operation der linken Seite der Gleichung (1) angewandt auf

$$\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1} A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix},$$

d. h. auf das Aggregat der in den zweiten Ableitungen $(n-\nu)$-dimensionalen Glieder von F.

Dann erhält man den Ausdruck:

$$\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left\{A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y_{ik}}\left[\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix}\right]\right\}(1+\delta_{ik}),$$

der bei Benutzung von § 2 (1) und (4) übergeht in:

$$\text{(a)}\qquad 2\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left\{A\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c\ i \\ a_1 b_1 \ldots c_1 k\end{pmatrix}\right\}.$$

Nun gilt für die Determinanten $\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix}$ die Formel:

$$\text{(2)}\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left\{\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c\ i \\ a_1 b_1 \ldots c_1 k\end{pmatrix}\right\} = 0.$$

Ein einfacher Beweis ergiebt sich aus den Resultaten der vorigen Paragraphen. Es ist dort nämlich bewiesen, dass eine particuläre Lösung der Gleichungen (1) jede beliebige Subdeterminante der symmetrischen Determinante $\Delta = |\,y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{nn}|$ ist, also auch $\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichungen (1) für F ein, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left\{\frac{\partial\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1\end{pmatrix}}{\partial y_{ik}}\right\}(1+\delta_{ik}) = 0$$

und hieraus bei Benutzung von § 2 (4):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left\{\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c\ i \\ a_1 b_1 \ldots c_1 k\end{pmatrix}+\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c\ k \\ a_1 b_1 \ldots c_1 i\end{pmatrix}\right\} = 0.$$

Ist jetzt einer der Indices $a, b, \ldots, c$ gleich k, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left\{\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c\ i \\ a_1 b_1 \ldots c_1 k\end{pmatrix}\right\} = 0,$$

also die zu beweisende Relation. Da k aber ein ganz beliebiger der Indices 1, 2, . . ., n ist, so kann man stets annehmen, dass einer der Indices $a, b, \ldots, c$ gleich k ist.

Mit Berücksichtigung der Gleichung (2) geht der Ausdruck (a) über in:

$$(a)\qquad 2\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\sum_{i=1}^{n} \Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c & i\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 & k\end{pmatrix}\frac{d}{dx_i}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}.$$

Es ist nun:

$$(3)\qquad \frac{d}{dx_i}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\} = A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}_i + \sum_{\delta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}y_{\delta i},$$

wo

$$A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}y_i$$

frei von den zweiten Ableitungen ist.

Bei Benutzung von (3) wird der Ausdruck (a):

$$(b)\qquad 2\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\sum_{i=1}^{n} A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}_i\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c & i\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 & k\end{pmatrix}$$

$$(c)\qquad +2\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\sum_{\delta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_\delta}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}\sum_{i=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c & i\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 & k\end{pmatrix}y_{\delta i}.$$

$$[(a) = (b)+(c)]$$

Der Ausdruck (c) endlich formt sich mit Hülfe von § 2 (3) um in:

$$(d)\qquad 2\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1\neq k}\frac{\partial}{\partial y_k}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}$$

$$(e)\qquad +2\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\sum_{\delta\neq k}(-1)^{[a_1b_1\ldots c_1(\delta)]+1}\frac{\partial}{\partial y_\delta}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1k(\delta)\end{pmatrix}.$$

$$[(c) = (d)+(e)]$$

Die Anwendung der Operation, welche durch die rechte Seite von (1) definirt wird, auf die $(n-\nu)$-dimensionalen Glieder von F liefert den Ausdruck:

$$(f)\qquad 2\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\frac{\partial}{\partial y_k}\left\{A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}.$$

Bei Anwendung der durch (1) vorgeschriebenen Operation auf die Terme $(n-\nu)$ter Dimension von F erhält man also einen Komplex von Gliedern $(n-\nu)$ter Dimension (d), (e), (f) und einen Komplex von Gliedern $(n-\nu-1)$ter Dimension (b).

Unterwirft man daher den Gesamtausdruck F dieser Operation, so werden nur die Glieder der $(n-\nu)$ten und $(n-\nu+1)$ten Dimension solche der $(n-\nu)$ten liefern.

Der so entstandene Komplex $(n-\nu)$ter Dimension muss für sich verschwinden. Daher hat man die Relation:

$$(\alpha) \qquad \sum_{\alpha\beta\ldots\gamma} \sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} \sum_{i=1}^{n} A\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 i\end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \ldots\gamma\ i\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k\end{pmatrix}$$

$$(\beta) \quad +\sum_{ab\ldots c} \sum_{a_1b_1\ldots c_1 \neq k} \frac{\partial}{\partial y_k}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ a_1 b_1\ldots c_1\end{pmatrix}\right\} \Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ a_1 b_1\ldots c_1\end{pmatrix}$$

$$(\gamma) \quad +\sum_{ab\ldots c} \sum_{a_1b_1\ldots c_1} \sum_{\delta \neq k} (-1)^{[a_1b_1\ldots c_1(\delta)]+1} \frac{\partial}{\partial y_\delta}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ a_1 b_1\ldots c_1\end{pmatrix}\right\} \Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ a_1 b_1\ldots c_1 k(\delta)\end{pmatrix}$$

$$(\delta) \quad -\sum_{ab\ldots c} \sum_{a_1b_1\ldots c_1} \frac{\partial}{\partial y_k}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ a_1 b_1\ldots c_1\end{pmatrix}\right\} \Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ a_1 b_1\ldots c_1\end{pmatrix} = 0.$$

$$[(\alpha)+(\beta)+(\gamma)+(\delta) = 0]$$

Die Ausdrücke (α), (β), (γ), (δ) sind so umzugestalten, dass man den Koeffizienten einer jeden in dieser Relation vorkommenden Determinante in geschlossener Form erhält.

Der Ausdruck (β) hebt sich fort gegen diejenigen Summanden von (δ), bei denen keiner der Indices $a_1, b_1, \ldots, c_1$ gleich k ist. In $(\beta)+(\delta)$ bleiben also nur die Summanden übrig, bei denen einer der Indices $a_1, b_1, \ldots, c_1$ gleich k ist. Es wird daher $(\beta)+(\delta)$ gleich:

$$\sum_{ab\ldots c} \sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} (-1)^{(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k)+1} \frac{\partial}{\partial y_k}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k\end{pmatrix}\right\} \Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k\end{pmatrix}.$$

Der Ausdruck (γ) lässt sich identisch umformen in:

$$(\gamma) \quad \sum_{ab\ldots c} \sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} \Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k\end{pmatrix} \sum_{\delta \neq k} (-1)^{(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta)+1} \frac{\partial}{\partial y_\delta}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta\end{pmatrix}\right\},$$

indem man, anstatt über die Kombinationen der νten Klasse $a_1\ b_1\ \ldots\ c_1$ zu summieren und dann den Index δ fortzulassen, über die Kombinationen $\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1$ der $(\nu-1)$ten Klasse summiert.

Nach dieser Umformung wird $(\beta)+(\gamma)+(\delta)$:

$$\sum_{ab\ldots c} \sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} \Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k\end{pmatrix} \sum_{\delta=1}^{n} (-1)^{(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta)+1} \frac{\partial}{\partial y_\delta}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta\end{pmatrix}\right\}.$$

Der Ausdruck (α) endlich lässt sich identisch umformen in:

$$(\alpha) \qquad \sum_{ab\ldots c} \sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} \Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k\end{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}{}' (-1)^{[ab\ldots c(i)]} A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c(i)\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\end{pmatrix}_i,$$

indem man, anstatt über die Kombinationen der $(\nu-1)$ten Klasse $\alpha\ \beta\ \ldots\ \gamma$ und dann über i zu summieren, über die Kombinationen $a\ b\ \ldots\ c$ der νten Klasse summiert.

Die schliessliche Zusammenfassung $(\alpha)+(\beta)+(\gamma)+(\delta)$ ergiebt:

$$\sum_{ab\ldots c}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1}\Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots\ c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1 k\end{pmatrix}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{[ab\ldots c(i)]}A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots\ c(i)\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\end{pmatrix}_i\right.$$
$$\left.+\sum_{\delta=1}^{n}(-1)^{(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta)+1}\frac{\partial}{\partial y_\delta}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots\ c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta\end{pmatrix}\right\}\right]=0.$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Diejenigen Determinanten, bei denen keiner der Indices $a,\ b,\ \ldots,\ c$ gleich k ist, kommen in der Summe nur einmal vor. Für $a,\ b,\ \ldots,\ c \neq k$ erhält man also:

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n}(-1)^{[ab\ldots c(i)]}A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots\ c(i)\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\end{pmatrix}_i+\sum_{\delta=1}^{n}(-1)^{(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta)+1}\frac{\partial}{\partial y_\delta}\left\{A\begin{pmatrix}a\ b\ \ldots c\\ \alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\delta\end{pmatrix}\right\}=0.$$

Da k ein beliebiger Index ist, kann man aber immer annehmen, dass $a, b, \ldots, c \neq k$ ist, ausser wenn $\nu = n$ ist. Die Determinante $\Delta\begin{pmatrix}1\,2\ldots n\\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix}$ kommt jedoch ebenfalls nur einmal vor. Also ist auch in diesem Falle die Relation (4) richtig.

Abschnitt II.

§ 7.

Die Aufgabe von Abschnitt II war zu beweisen, dass, wenn δF sich selbst adjungiert ist, F sich durch Quadraturen auf die Form $V(f)$ bringen lässt.

Diese Aufgabe soll für $n \leqq 5$ nach dem Vorgange von Herrn Hirsch gelöst werden, indem gezeigt wird, dass der Ausdruck:

$$\text{(A)} \qquad F = \sum \sum_{ab\ldots c} \sum_{a_1 b_1 \ldots c_1} A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix}$$

durch Subtraktion geeignet konstruierter Grössen $V(\varphi)$ nach und nach zu Null gemacht werden kann. Zu dem Behufe sollen in diesem Paragraphen zunächst zwei allgemeine Sätze bewiesen werden.

Ist f ein partieller Differentialausdruck zweiter Ordnung, so ist im allgemeinen $V(f)$ von der vierten Ordnung. Nun ist aber eine Vorbedingung dafür, dass $V(f)$ die Form von (A) habe, das Fehlen der dritten und vierten Ableitungen in $V(f)$. Es liegt daher die Frage nahe, welchen Bedingungen die Funktion

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nn})$$

genügen muss, damit $V(f)$ frei von den dritten und vierten Ableitungen wird.

Da $V(f)$ bekanntlich stets von gerader Ordnung ist, genügt es, die Bedingung dafür herzustellen, dass $V(f)$ die vierten Ableitungen nicht enthält.

Es ist:

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \sum_a \frac{d}{dx_a}\left[\frac{\partial f}{\partial y_a}\right] + \sum_{b \leqq c} \frac{d^2}{dx_b dx_c}\left[\frac{\partial f}{\partial y_{bc}}\right].$$

Vierte Ableitungen enthält nur der Summand:

$$\sum_{b \leqq c} \frac{d^2}{dx_b dx_c}\left[\frac{\partial f}{\partial y_{bc}}\right] = \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{n} \frac{d}{dx_b}\left[\sum_{c=1}^{n} \frac{d}{dx_c}\left\{\frac{\partial f}{\partial y_{bc}}\right\}\right](1 + \delta_{bc}).$$

Dieser Ausdruck ist dann und nur dann frei von den vierten Ableitungen, wenn

$$\sum_{\varepsilon=1}^{n} \frac{d}{dx_\varepsilon}\left[\frac{\partial f}{\partial y_{b\varepsilon}}\right](1+\delta_{b\varepsilon})$$

frei von den dritten Ableitungen ist. Gerade aus dieser Forderung war aber in § 1 das System (S) hervorgegangen. Wir erhalten also:

Satz 1: Ist $V(f)$ zugleich mit f selbst ein Differentialausdruck zweiter Ordnung, so ist f in Bezug auf die zweiten Ableitungen ein Ausdruck derselben Beschaffenheit wie der Diffentialausdruck zweiter Ordnung F unter der Voraussetzung, dass δF sich selbst adjungiert ist.

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ist:

Lässt sich der Differentialausdruck zweiter Ordnung F von der Beschaffenheit, dass δF sich selbst adjungiert ist, auf die Form $V(f)$ bringen, so hat f in Bezug auf die zweiten Ableitungen dieselbe Form wie F.

Für $n \leqq 7$ ist dann also auch f eine lineare Funktion von Δ und den Subdeterminanten von Δ.

Umgekehrt gilt:

Satz 2: Ist der Diffentialausdruck zweiter Ordnung f eine lineare Verbindung der symmetrischen Determinante Δ und ihrer Subdeterminanten, so hat $V(f)$ dieselbe Beschaffenheit.

Der Beweis dieses Satzes soll durch vollständige Entwickelung des Ausdruckes $V(\varphi)$ geführt werden, wo φ ein beliebiges Glied eines Aggregates von der obigen Beschaffenheit ist.

Es sei:

$$\varphi = M\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix},$$

wo M nur

$$x_1, \dots, x_n; \; y; \; y_1, \dots, y_n$$

enthält.

Dann ist:

$$1) \qquad V(\varphi) = \frac{\partial M}{\partial y}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{d}{dx_\alpha}\left\{\frac{\partial M}{\partial y_\alpha}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$+ \sum_{\beta \leqq \gamma} \frac{d^2}{dx_\beta dx_\gamma}\left\{M\frac{\partial}{\partial y_{\beta\gamma}}\left[\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}\right]\right\}.$$

Die drei Summanden der rechten Seite seien der Kürze halber der Reihe nach mit (a), (b) und (c) bezeichnet:

$$[V(\varphi) = (a)+(b)+(c)].$$

Der Ausdruck (*c*) wird, wenn man für

$$\frac{\partial}{\partial y_{\beta\gamma}}\left[\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}\right]$$

den Wert aus § 2 (4) einsetzt, gleich

$$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{d}{dx_\beta}\left\{\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{d}{dx_\gamma}\left[M\,\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \beta \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & \gamma \end{pmatrix}\right]\right\}$$

und wenn man § 6 (2) berücksichtigt gleich

(c) $$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{d}{dx_\beta}\left\{\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{dM}{dx_\gamma}\,\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \beta \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & \gamma \end{pmatrix}\right\}.$$

Nun ist:

$$\frac{dM}{dx_\gamma} = M_\gamma + \sum_{\delta=1}^{n}\frac{\partial M}{\partial y_\delta}y_{\gamma\delta},$$

wo

$$M_\gamma = \frac{\partial M}{\partial y_\gamma} + \frac{\partial M}{\partial y}y_\gamma$$

wie M selbst frei von den zweiten Ableitungen ist. Setzt man diesen Wert von $\frac{dM}{dx_\gamma}$ in (c) ein, so erhält man:

(d) $$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{d}{dx_\beta}\left\{\sum_{\gamma=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \beta \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & \gamma \end{pmatrix}M_\gamma\right\}$$

(e) $$+\sum_{\beta=1}^{n}\frac{d}{dx_\beta}\left\{\sum_{\delta=1}^{n}\frac{\partial M}{\partial x_\delta}\sum_{\gamma=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \beta \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & \gamma \end{pmatrix}y_{\gamma\delta}\right\}.$$

$$[(c) = (d)+(e)]$$

In (e) werde für

$$\sum_{\gamma=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \beta \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & \gamma \end{pmatrix}y_{\gamma\delta}$$

der Wert aus § 2 (3) eingesetzt. Dann geht (e) über in:

(f) $$\sum_{\beta\neq ab\dots c}\frac{d}{dx_\beta}\left\{\frac{\partial M}{\partial y_\beta}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 \end{pmatrix}\right\}$$

(g) $$+\sum_{\beta=1}^{n}\frac{d}{dx_\beta}\left\{\sum_{\delta=ab\dots c}(-1)^{[ab\dots c(\delta)]+1}\frac{\partial M}{\partial y_\delta}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \dots & c & \beta\,(\delta) \\ a_1 & b_1 & \dots & c_1 & \end{pmatrix}\right\}.$$

$$[(e) = (f)+(g)]$$

(f) hebt sich fort gegen diejenigen Summanden von (b), bei denen $\alpha \neq a, b, \ldots, c$ ist. (b)+(f) kann man dann in folgender Form schreiben:

$$\text{(b)+(f)} \qquad \sum_{\alpha=ab\ldots c} \frac{d}{dx_\alpha}\left\{\sum_{\varepsilon=ab\ldots c}(-1)^{[a\,b\ldots c(\varepsilon)]+1}\frac{\partial M}{\partial y_\varepsilon}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\,\alpha(\varepsilon)\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\};$$

denn in diesem Ausdrucke ist nach § 2 Festsetzung (I) jeder Summand identisch Null, bei dem $\varepsilon \neq \alpha$ ist. In dieser Form lässt sich (b)+(f) mit (g) zusammenfassen zu:

$$\text{(h)} \qquad \sum_{\beta=1}^{n}\frac{d}{dx_\beta}\left\{\sum_{\delta=ab\ldots c}(-1)^{[a\,b\ldots c(\delta)]+1}\frac{\partial M}{\partial y_\delta}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\,\beta(\delta)\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$[\text{(b)}+\text{(e)} = \text{(h)}]$$

Es ist:

$$\frac{d}{dy_\beta}\left[\frac{\partial M}{\partial y_\delta}\right] = \left(\frac{\partial M}{\partial y_\delta}\right)_\beta + \sum_{\varepsilon=1}^{n}\frac{\partial^2 M}{\partial y_\varepsilon\,\partial y_\delta}\,y_{\varepsilon\beta},$$

wo

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y_\delta}\right)_\beta = \frac{\partial^2 M}{\partial x_\beta\,\partial y_\delta} + \frac{\partial^2 M}{\partial y_\delta\,\partial y}\,y_\beta$$

nur die ersten Ableitungen enthält. Bei Berücksichtigung von § 6 (2) wird daher (h) gleich

$$\text{(i)} \qquad \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\delta=ab\ldots c}(-1)^{[a\,b\ldots c(\delta)]+1}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\,\beta(\delta)\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\left(\frac{\partial M}{\partial y_\delta}\right)_\beta$$

$$\text{(k)} \qquad +\sum_{\delta=ab\ldots c}(-1)^{[a\,b\ldots c(\delta)]+1}\sum_{\varepsilon=1}^{n}\frac{\partial^2 M}{\partial y_\varepsilon\,\partial y_\delta}\sum_{\beta=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\,\beta(\delta)\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}y_{\varepsilon\beta}.$$

$$[\text{(h)} = \text{(i)}+\text{(k)}]$$

In (k) setze man für

$$\sum_{\beta=1}^{n}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\,\beta(\delta)\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}y_{\varepsilon\beta}$$

den Wert aus § 2 (3) ein. Dann erhält man:

$$\text{(k)} \qquad \sum_{\delta=1}^{n}\sum_{\varepsilon=1}^{n}(-1)^{[a\,b\ldots c(\delta)]+[a_1 b_1\ldots c_1(\varepsilon)]+1}\frac{\partial^2 M}{\partial y_\varepsilon\,\partial y_\delta}\Delta\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c\,(\delta)\\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1(\varepsilon)\end{pmatrix}.$$

Nun hat nur (d) noch nicht die verlangte Form. In analoger Weise formt sich

aber auch dieser Ausdruck um in:

$$\text{(l)} \qquad \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ \beta \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1\ \gamma \end{pmatrix} M_{\beta\gamma}$$

$$\text{(m)} \qquad \sum_{\gamma \neq a_1 b_1 \dots c_1} \frac{\partial M_\gamma}{\partial y_\gamma} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(n)} \qquad \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\varepsilon = a_1 b_1 \dots c_1} (-1)^{[a_1 b_1 \dots c_1(\varepsilon)]+1} \frac{\partial M_\gamma}{\partial y_\varepsilon} \Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1\ \gamma(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

$$[(\text{d}) = (\text{l})+(\text{m})+(\text{n})]$$

In (l) ist der Ausdruck:

$$M_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 M}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial M}{\partial x_\beta} y_\gamma + \frac{\partial M}{\partial x_\gamma} y_\beta\right] + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} y_\beta y_\gamma = M_{\gamma\beta}$$

frei von den zweiten Ableitungen. Damit ist $V(\varphi)$ auf die verlangte Form gebracht. Es ist:

$$V(\varphi) = (\text{a})+(\text{i})+(\text{k})+(\text{l})+(\text{m})+(\text{n})$$

ein Aggregat von Subdeterminanten $(n-\nu-1)$ter, $(n-\nu)$ter und $(n-\nu+1)$ter Klasse der symmetrischen Determinante

$$\Delta = |\, y_{11}, y_{22}, \dots, y_{nn} \,|\,.$$

Den Satz (2) hat, worauf Herr Prof. P. Stäckel mich in liebenswürdiger Weise aufmerksam gemacht hat, bereits Herr Kürschák[1]) bewiesen. Der von mir gegebene Beweis zeigt indes nicht nur, wie der des Herrn Kürschák, dass $V\left[M\,\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 \end{pmatrix}\right]$ überhaupt ein Aggregat von Subdeterminanten von Δ ist, sondern giebt diesen ganzen Ausdruck in entwickelter Form, was für die vorliegende Untersuchung notwendig war.

Interessant ist es auch, dass die Formel

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left[\Delta\begin{pmatrix} a\ b\ \dots\ c\ i \\ a_1\ b_1\ \dots\ c_1 k \end{pmatrix}\right] = 0,$$

die in § 6 bewiesen wurde, in der Abhandlung des Herrn Kürschák als Folge eines bekannten Satzes von Jacobi[2]) über Funktionaldeterminanten auftritt.

---

1) Kürschák, *„Ueber die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung"*, Math. Annalen Bd. 56 (1902), Seite 155—164.

2) Jacobi, *„Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi"*. Journal für Mathematik Bd. 27 (1844), Seite 203 (lemma fundamentale), wieder abgedruckt Ges. Werke, Bd. IV, Seite 323.

§ 8.

Das allgemeinste Verfahren zur vollständigen Lösung der Aufgabe wäre jetzt folgendes:

Man bilde auf die in § 7 entwickelte Weise den Ausdruck:

$$V\left\{\sum \sum_{ab\ldots c} \sum_{a_1 b_1 \ldots c_1} \Delta \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \sum \sum_{ab\ldots c} \sum_{a_1 b_1 \ldots c_1} \Delta \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix}$$

und weise nach, dass die Funktionen M sich durch Quadraturen so bestimmen lassen, dass

$$N \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix}$$

wird, wenn nur zwischen den Funktionen A die Relationen § 6 (4) bestehen. Es leuchtet indessen ein, dass dies Verfahren aussichtslos ist, da, wie § 7 lehrt, die Funktionen N recht komplizierte Aggregate der Ableitungen der Grössen M nach ihren Argumenten sind.

Zweckmässiger ist es zu versuchen, sich Grössen $V(\varphi_n)$, $V(\varphi_{n-1}), \ldots, V(\varphi_0)$ so herzustellen, dass durch ihre Subtraktion von (A) der Reihe nach die Glieder n ter, $(n-1)$ ter, ..., 0 ter Dimension dieses Ausdruckes zu Null gemacht werden. Wenn dies gelingt so hat man:

$$F = V(\varphi_n) + V(\varphi_n) + V(\varphi_{n-1}) + \cdots, + V(\varphi_0) = V(\varphi_n + \varphi_{n-1} + \cdots \varphi_1) = V(f).$$

Es soll dabei in Folgendem so verfahren werden, dass der zur Fortschaffung der Glieder $(n-\nu)$ ter Dimension benutzte Ausdruck φ selbst von der $(n-\nu-1)$ ten Dimension ist. Dadurch gewinnt man den Vorteil, dass von dem gesamten Ausdruck $V(\varphi)$ nur die dem völlig symmetrischen Ausdrucke (k) des § 7 entsprechenden Summanden bestimmt zu werden brauchen. Den Gliedern niederer Dimension von $V(\varphi)$ legt man keine weiteren Bedingungen auf. Durch ihre Subtraktion von (A) wird dieser Ausdruck in seinen wesentlichen Eigenschaften nicht verändert. Nur werden sich die Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Subdeterminanten vereinfachen dadurch, dass eine Anzahl dieser Koeffizienten Null wird.

Es soll deshalb die Bezeichnung $A \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix}$ der Koeffizienten der $\Delta \begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 \end{pmatrix}$ durch die ganze Rechnung dieselbe bleiben, wobei man sich aber

gegenwärtig halten möge, dass die Werte dieser Koeffizienten durch Hinzufügung von Grössen, über die wir uns keine Rechenschaft zu geben brauchen, fortwährend verändert werden.

Es ist abgesehen von Gliedern niederer Dimenson $V(\varphi_\nu)$ gleich

$$V\Big[\sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1} A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix} M\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}\Big]$$

$$= \sum_{ab\ldots c}\sum_{a_1b_1\ldots c_1}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\varepsilon=1}^{n} A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c & (\delta) \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 & (\varepsilon)\end{pmatrix}(-1)^{[ab\ldots c(\delta)]+[a_1b_1\ldots c_1(\varepsilon)]+1}\frac{\partial^2 M\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}}{\partial y_\delta\,\partial y_\varepsilon}$$

$$= \sum_{\alpha\beta\ldots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1} A\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1\end{pmatrix}\sum_{\delta=1}^{n}\sum_{\varepsilon=1}^{n}(-1)^{(\alpha\beta\ldots\gamma\delta)+(\alpha_1\beta_1\ldots\gamma_1\varepsilon)+1}\frac{\partial^2 M\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \gamma_1 & \varepsilon\end{pmatrix}}{\partial y_\delta\,\partial y_\varepsilon}+\ldots$$

Es können demgemäss die Glieder $(n-\nu)$ter Dimension durch Subtraktion eines Ausdruckes $V(\varphi_{\nu+1})$ von (A) vernichtet werden, falls sich die Funktionen M so bestimmen lassen, dass

$$(1)\qquad \sum_{\delta=1}^{n}\sum_{\varepsilon=1}^{n}(-1)^{(ab\ldots c\delta)+(a_1b_1\ldots c_1\varepsilon)+1}\frac{\partial^2 M\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c & \delta \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1 & \varepsilon\end{pmatrix}}{\partial y_\delta\,\partial y_\varepsilon} = A\begin{pmatrix} a & b & \ldots & c \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}$$

wird, wenn nur zwischen den A die Relationen § 6 (4) bestehen.

Für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ lässt sich diese Bestimmung, wie später gezeigt werden soll, stets ausführen. Unter der Annahme, dass sie für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1$ ausführbar ist, reduzieren sich die Gleichungen § 6 (4) für $\nu = \mu$ auf

$$(2)\qquad \sum_{\vartheta=1}^{n}(-1)^{(\alpha\beta\ldots\gamma\vartheta)}\frac{\partial A\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma & \vartheta \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}}{\partial y_\vartheta} = 0.$$

Man würde also zu zeigen haben, dass die Gleichungen (2) die notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen für (1) sind.

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen ist leicht nachzuweisen.

Setzt man nämlich in den Ausdruck

$$\sum_{\vartheta=1}^{n}(-1)^{(\alpha\beta\ldots\gamma\vartheta)}\frac{\partial A\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \gamma & \vartheta \\ a_1 & b_1 & \ldots & c_1\end{pmatrix}}{\partial y_\vartheta}$$

für die A ihre Werte aus (1) ein, so erhält man:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{n}\sum_{\vartheta=1}^{n}\sum_{\vartheta=1}^{n}(-1)^{(a_1 b_1 \dots c_1 \varepsilon)+(\alpha\beta\dots\gamma\vartheta\vartheta)+1}\frac{\partial^2 M\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \dots\gamma\vartheta\vartheta\\ a_1 b_1\dots c_1\ \varepsilon\end{pmatrix}}{\partial y_\varepsilon\,\partial y_\vartheta\,\partial y_\vartheta}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet identisch, da zu jedem Wertepaar ϑ, ϑ zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene Summanden gehören.

Es bleibt zu beweisen, dass die Bedingungen (2) hinreichend sind. Der Beweis erscheint in dieser allgemeinen Form schwierig. Es soll deshalb das Verfahren weiter spezialisiert werden, indem auch die Glieder $(n-\nu)$ter Dimension nicht auf einmal, sondern nach und nach vernichtet werden sollen, wodurch sich die auszuführenden Integrationen sowie die Bedingungsgleichungen (2) immer mehr vereinfachen.

Ferner ist zu bemerken: Ist die Aufgabe für $n' = m-1$ vollständig gelöst, so ist es für $n = m$ nicht mehr nötig nachzuweisen, dass sich alle Glieder $(n-\nu)$ter Dimension in der angegebenen Weise entfernen lassen, sondern es genügt, diejenigen Determinanten fortzuschaffen, die irgend einen bestimmten Index, z. B. den Index 1, garnicht oder nur einmal enthalten; denn dann bleibt von den Gliedern $(n-\nu)$ter Dimension nur das Aggregat:

$$\sum_{\alpha\beta\dots\gamma}\sum_{\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1}\Delta\begin{pmatrix}1\,\alpha\,\beta\,\dots\gamma\\ 1\,\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\,\alpha\,\beta\,\dots\gamma\\ 1\,\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1\end{pmatrix}$$

übrig, und die Gleichungen (2) gehen über in:

a)
$$\frac{\partial A\begin{pmatrix}1\,\alpha\ \beta\ \dots\gamma\\ 1\,\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1\end{pmatrix}}{\partial y_1}=0$$

b)
$$\sum_{\vartheta=2}^{n}(-1)^{(a\,b\dots c\,\vartheta)}\frac{\partial A\begin{pmatrix}1\,a\ b\ \dots c\,\vartheta\\ 1\,\alpha_1\beta_1\dots\gamma_1\end{pmatrix}}{\partial y_\vartheta}=0,$$

wodurch die Aufgabe auf den als erledigt angesehenen Fall $n' = m-1$, $\nu' = \nu-1$ zurückgeführt ist.

Diejenigen Determinanten, die den Index 1 garnicht enthalten, lassen sich leicht entfernen durch Subtraktion des Ausdruckes:

$$V\Big[\sum_{a b\dots c}\sum_{a_1 b_1\dots c_1}M\begin{pmatrix}a\ b\ \dots c\\ a_1 b_1\dots c_1\end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix}1\,a\ b\ \dots c\\ 1\,a_1 b_1\dots c_1\end{pmatrix}\Big]$$

$$=-\sum_{a b\dots c}\sum_{a_1 b_1\dots c_1}\frac{\partial^2 M\begin{pmatrix}a\ b\ \dots c\\ a_1 b_1\dots c_1\end{pmatrix}}{\partial y_1^2}\Delta\begin{pmatrix}a\ b\ \dots c\\ a_1 b_1\dots c_1\end{pmatrix}$$

vermehrt um Glieder, die den Index 1 enthalten, und Glieder niederer Dimension.

Die Funktionen M sind aus den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 M\binom{a\ b\ \dots c}{a_1 b_1 \dots c_1}}{\partial y_1^2} = -A\binom{a\ b\ \dots c}{a_1 b_1 \dots c_1}$$

zu berechnen, was stets durch Quadraturen möglich ist.

Es bleiben zu vernichten die Determinanten, die den Index 1 einmal enthalten. Ihre Koeffizienten sind jetzt, wie aus (2) hervorgeht, frei von y_1; denn für $\alpha \neq 1$, $a_1 \neq 1$ lauten diese Gleichungen, wenn man diejenigen A gleich Null setzt, die den Index 1 nicht enthalten:

$$\frac{\partial A\binom{1\,\alpha\ \beta\ \dots \gamma}{a_1 b_1 \dots c_1}}{\partial y_1} = 0.$$

Es liegt daher nahe, die Entfernung der in Frage kommenden Terme in folgender Weise zu versuchen. Man bildet:

$$V\Big[\sum_{a b \dots c} \sum_{a_1 b_1 \dots c_1} A\binom{1\,a\ b\ \dots c}{1\,a_1 b_1 \dots c_1} y_1 L\binom{a\ b\ \dots c}{a_1 b_1 \dots c_1}\Big],$$

wo die L frei von y_1 sind, und erhält:

$$2\sum_{\alpha \beta \dots \gamma} \sum_{a_1 b_1 \dots c_1} A\binom{1\,\alpha\ \beta\ \dots \gamma}{a_1 b_1 \dots c_1} \sum_{\delta=2}^{n} (-1)^{\nu+1+(\alpha \beta \dots \gamma\, \delta)} \frac{\partial L\binom{\alpha\ \beta\ \dots \gamma\, \delta}{a_1 b_1 \dots c_1}}{\partial y_\delta}$$

vermehrt um Glieder, die den Index 1 zweimal enthalten, und Glieder niederer Dimension.

Dann muss man zeigen, dass die Funktionen L sich so bestimmen lassen, dass

$$\sum_{\delta=2}^{n} (-1)^{\nu+1+(\alpha \beta \dots \gamma\, \delta)} \frac{\partial L\binom{\alpha\ \beta\ \dots \gamma\, \delta}{a_1 b_1 \dots c_1}}{\partial y_\delta} = A\binom{1\,\alpha\ \beta\ \dots \gamma}{a_1 b_1 \dots c_1} \tag{3}$$

wird.

Von den Bedingungsgleichungen (2) kommen hier nur diejenigen in Betracht, in denen Grössen $A\binom{1\,\alpha\ \beta\ \dots \gamma}{a_1 b_1 \dots c_1}$ vorkommen, also ausser den bereits benutzten $\frac{\partial A\binom{1\,\alpha\ \beta\ \dots \gamma}{a_1 b_1 \dots c_1}}{\partial y_1} = 0$ nur noch:

$$(\alpha) \qquad \sum_{\vartheta=1}^{n} (-1)^{(a\,b\,\ldots\,c\,\vartheta)} \frac{\partial A\binom{1\,a\,b\,\ldots\,c\,\vartheta}{a_1 b_1 \ldots c_1}}{\partial y_\vartheta} = 0$$

$$(\beta) \quad (-1)^{\nu} \frac{\partial A\binom{1\,\alpha\,\beta\,\ldots\,\gamma}{1\,\alpha_1\,\beta_1\ldots\gamma_1}}{\partial y_1} = \sum_{\vartheta \neq 1} (-1)^{(\alpha_1\,\beta_1\ldots\gamma_1\,\vartheta)} \frac{\partial A\binom{1\,\alpha\,\beta\,\ldots\,\gamma}{\alpha_1\,\beta_1\ldots\gamma_1\,\vartheta}}{\partial y_\vartheta}. \qquad (\alpha_1 \neq 1)$$

Die Gleichungen (β) sind dadurch von Bedeutung, dass man daraus weitere Beziehungen zwischen den $A\binom{1\,\alpha\,\beta\,\ldots\,\gamma}{a_1 b_1 \ldots c_1}$ allein erhält, wenn man die linken Seiten eliminiert.

Von diesen Beziehungen werden die leicht herzuleitenden nachstehenden Gleichungen benutzt werden:

$$(\gamma) \qquad \sum_{\vartheta \neq 1,\, k,\, \lambda} (-1)^{(a\,b\,\ldots\,c\,\vartheta)\,+\,(k\,\lambda\,\vartheta)} \frac{\partial}{\partial y_\vartheta} \Big[\underset{a\,b\,\ldots\,c}{K} (k\,\lambda\,\vartheta) \Big] = 0,$$

wo der Abkürzung halber gesetzt ist $\underset{a\,b\,\ldots\,c}{K}(k\,\lambda\,\mu)$ für:

$$A\binom{a\,b\,\ldots\,c\,1\,k}{a\,b\,\ldots\,c\,\lambda\,\mu} + A\binom{a\,b\,\ldots\,c\,1\,\mu}{a\,b\,\ldots\,c\,k\,\lambda} - A\binom{a\,b\,\ldots\,c\,1\,\lambda}{a\,b\,\ldots\,c\,k\,\mu}.$$

$$(k < \lambda < \mu).$$

Aus den bisher gefundenen Resultaten folgt zunächst, dass für beliebiges n die Glieder $n$ter und $(n-1)$ter Dimension vernichtet werden können.

Das Glied $n$ter Dimension enthält den Index 1 garnicht und kann deshalb stets fortgeschafft werden.

Von den Gliedern $(n-1)$ter Dimension können darauf zunächst diejenigen entfernt werden, die den Index 1 garnicht enthalten, und dann, indem man bildet:

$$V\Big[\sum_a L\binom{a}{a} y_1 \Delta\binom{1\,a}{1\,a}\Big]$$

$$= 2\sum_a \frac{\partial L\binom{\cdot}{a}}{\partial y_a} \Delta\binom{1}{a} + \cdots,$$

und

$$\frac{\partial L\binom{\cdot}{a}}{\partial y_a} = A\binom{1}{a}$$

setzt, die Terme, die den Index 1 einmal enthalten. Damit ist die Reduktion auf den Fall $n' = n-1$, $\nu' = 0$ geleistet, der allgemein erledigt ist.

Für $\nu \geqq 2$ beschränken wir uns auf die Fälle $n = 4$ und $n = 5$, die jetzt nach einander behandelt werden sollen.

I.

$n = 4$.

1. $\nu = 2$.

a) Es sollen zunächst diejenigen Glieder entfernt werden, die alle 4 Indices enthalten. Die zugehörigen Gleichungen (3) sind:

$$A\binom{1\,2}{3\,4} = -\frac{\partial L\binom{3\,2}{3\,4}}{\partial y_3} - \frac{\partial L\binom{4\,2}{4\,3}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{1\,3}{2\,4} = +\frac{\partial L\binom{2\,3}{2\,5}}{\partial y_2} - \frac{\partial L\binom{4\,2}{4\,3}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{1\,4}{2\,3} = +\frac{\partial L\binom{2\,3}{2\,4}}{\partial y_2} + \frac{\partial L\binom{3\,2}{3\,4}}{\partial y_3}.$$

Die Bestimmung der L lässt sich dann und nur dann ausführen, wenn zwischen den linken Seiten die Relation besteht:

$$A\binom{1\,2}{3\,4} + A\binom{1\,4}{2\,3} - A\binom{1\,3}{2\,4} = K(2\,3\,4) = 0.$$

Da nun zwischen den 3 zugehörigen Determinanten $\Delta\binom{1\,2}{3\,4}$, $\Delta\binom{1\,3}{2\,4}$, $\Delta\binom{1\,4}{2\,3}$ eine Kroneckersche Relation besteht, so kann man, ohne der Allgemeinheit des Ausdruck (A) Abbruch zu thun, zwischen den Grössen $A\binom{1\,2}{3\,4}$, $A\binom{1\,3}{2\,4}$, $A\binom{1\,4}{2\,3}$ eine ganz beliebige Relation festsetzen, also auch die obige.

b) Jetzt bilde man:

$$V\Big[\sum_{ab} L'\binom{a\,b}{a\,b} y_1 \Delta\binom{1\,a\,b}{1\,a\,b}\Big]$$

$$= 2\sum_{ab}\sum_{\delta=a,b} (-1)^{[a\,b\,(\delta)]+1} \frac{\partial L'\binom{a\,b}{a\,b}}{\partial y_\delta} \Delta\binom{1\,a\,b\,(\delta)}{a\,b} + \cdots$$

und setze:

$$\frac{\partial L'\binom{a\,b}{a\,b}}{\partial y_\delta} = (-1)^{[a\,b\,(\delta)]} A\binom{1\;a\,b\,(\delta)}{a\;b}. \qquad (\delta = a, b)$$

Die notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen sind:

$$\frac{\partial A\binom{1\,a}{a\,b}}{\partial y_a} + \frac{\partial A\binom{1\,b}{a\,b}}{\partial y_b} = 0.$$

Gerade in diese Gleichungen gehen aber die Relationen (α) über, wenn man darin diejenigen A, die alle 4 Indices enthalten, gleich Null setzt.

Damit ist die Reduktion auf den Fall $n' = 3$, $\nu' = 1$ geleistet.

2. $\nu = 3$.

Die Gleichungen (3) lauten:

$$A\binom{1\,2\,3}{2\,3\,4} = \frac{\partial L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,4}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{1\,2\,4}{2\,3\,4} = -\frac{\partial L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,4}}{\partial y_3}$$

$$A\binom{1\,3\,4}{2\,3\,4} = \frac{\partial L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,4}}{\partial y_2}.$$

Die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen sind:

$$\sum_{\delta=1}^{4} (-1)^{(\alpha\delta)} \frac{\partial L\binom{1\;\alpha\;\delta}{2\,3\,4}}{\partial y_\delta} = 0,$$

also gerade die Gleichungen (α) für den Fall $n = 4$, $\nu = 3$.

Die Bestimmung von $L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,4}$ ist daher ausführbar.

3. $\nu = 4$

Die zugehörige Determinante $\Delta\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4}$ enthält den Index 1 zweimal. Der Fall ist also auf $n' = 3$, $\nu' = 3$ zurückgeführt.

II.

$$n = 5.$$

1. $\nu = 2$.

a) Die Gleichungen für diejenigen A, die 4 verschiedene Indices enthalten, sind:

$$A\binom{1\,2}{3\,4} = -\frac{\partial L\binom{3\,2}{3\,4}}{\partial y_2} - \frac{\partial L\binom{4\,2}{4\,3}}{\partial y_4} - \frac{\partial L\binom{2\,5}{3\,4}}{\partial y_5}$$

$$A\binom{1\,3}{2\,4} = +\frac{\partial L\binom{2\,3}{2\,4}}{\partial y_2} - \frac{\partial L\binom{4\,2}{4\,3}}{\partial y_4} - \frac{\partial L\binom{2\,4}{3\,5}}{\partial y_5}$$

$$A\binom{1\,4}{2\,3} = +\frac{\partial L\binom{2\,3}{2\,4}}{\partial y_2} + \frac{\partial L\binom{3\,2}{3\,4}}{\partial y_3} - \frac{\partial L\binom{2\,3}{4\,5}}{\partial y_5}$$

und drei analoge Gruppen.

Die Elimination derjenigen L, die nur 3 verschiedene Indices enthalten, kann offenbar nur geschehen, indem man bildet:

$$A\binom{1\,2}{3\,4} + A\binom{1\,4}{2\,3} - A\binom{1\,3}{2\,4} = K(2\,3\,4) = -\frac{\partial P(2\,3\,4\,5)}{\partial y_5}$$

und ebenso:

$$K(2\,3\,5) = +\frac{\partial P(2\,3\,4\,5)}{\partial y_4}$$

$$K(2\,4\,5) = -\frac{\partial P(2\,3\,4\,5)}{\partial y_3}$$

$$K(3\,4\,5) = +\frac{\partial P(2\,3\,4\,5)}{\partial y_2},$$

wo $P(2\,3\,4\,5)$ für:

$$L\binom{2\,3}{4\,5} + L\binom{2\,5}{3\,4} - L\binom{2\,4}{3\,5}$$

gesetzt ist.

Die notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen sind:

$$\sum_{\vartheta=1}^{5} (-1)^{(k\lambda\vartheta)} \frac{\partial}{\partial y_\vartheta} \Big[K(k\lambda\vartheta) \Big] = 0,$$

also gerade die Gleichungen (γ) für den Fall $n = 5$, $\nu = 2$.

Daher ist zunächst die Bestimmung von $P(2345)$ und darauf auch diejenige der L möglich.

b) Die Entfernung der Glieder, die nur 3 verschiedene Indices enthalten, geschieht in genau derselben Weise wie die der entsprechenden Terme unter I. 1. b).

2. $\nu = 3$.

a) Die Gleichungen (3) für diejenigen A, die alle 5 Indices enthalten sind:

$$A\binom{5\,1\,2}{5\,3\,4} = -\frac{\partial L\binom{3\,5\,2}{3\,5\,4}}{\partial y_3} - \frac{\partial L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{5\,1\,3}{5\,2\,4} = -\frac{\partial L\binom{2\,5\,3}{2\,5\,4}}{\partial y_2} - \frac{\partial L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{5\,1\,4}{5\,2\,3} = +\frac{\partial L\binom{2\,5\,3}{2\,5\,4}}{\partial y_2} + \frac{\partial L\binom{3\,5\,2}{3\,5\,4}}{\partial y_3}$$

und 3 analoge Gruppen.

Hieraus folgt zunächst die Relation:

$$\underset{5}{K}(2\,3\,4) = 0;$$

in derselben Weise erhält man:

$$\underset{2}{K}(3\,4\,5) = 0;\ \underset{3}{K}(2\,4\,5) = 0;\ \underset{4}{K}(2\,3\,5) = 0.$$

Diese 4 Relationen kann man wieder beliebig festsetzen, da sie wegen der zwischen den zugehörigen Determinanten bestehenden Kronecker'schen Beziehungen die Allgemeinheit des Ausdruckes (A) nicht beschränken.

Nach dieser Festsetzung kann man aus jeder Gruppe eine Gleichung fortlassen; denn wenn die L so bestimmt sind, dass sie den übrigen 8 Gleichungen genügen, so sind die nicht berücksichtigten vier identisch erfüllt.

Zur Bestimmung der L seien folgende 8 Gleichungen ausgewählt:

$$A\binom{2\,1\,5}{2\,3\,4} = +\frac{\partial L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_3} + \frac{\partial L\binom{2\,4\,3}{2\,4\,5}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{4\,1\,3}{4\,2\,5} = -\frac{\partial L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_5} - \frac{\partial L\binom{2\,4\,3}{2\,4\,5}}{\partial y_2}$$

$$A\binom{2\,1\,4}{2\,3\,5} = +\frac{\partial L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_3} - \frac{\partial L\binom{2\,5\,3}{2\,5\,4}}{\partial y_5}$$

$$A\binom{5\,1\,3}{5\,2\,4} = +\frac{\partial L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_4} - \frac{\partial L\binom{2\,5\,3}{2\,5\,4}}{\partial y_2}$$

$$A\binom{3\,1\,5}{3\,2\,4} = -\frac{\partial L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_2} + \frac{\partial L\binom{3\,4\,2}{3\,4\,5}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{4\,1\,2}{4\,3\,5} = -\frac{\partial L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_5} - \frac{\partial L\binom{3\,4\,2}{3\,4\,5}}{\partial y_3}$$

$$A\binom{3\,1\,4}{3\,2\,5} = -\frac{\partial L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_3} - \frac{\partial L\binom{3\,5\,2}{3\,5\,4}}{\partial y_5}$$

$$A\binom{5\,1\,2}{5\,3\,4} = +\frac{\partial L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_4} - \frac{\partial L\binom{3\,5\,2}{3\,5\,4}}{\partial y_3}.$$

Jede der Grössen

$$L\binom{2\,4\,3}{2\,4\,5},\ L\binom{2\,5\,3}{2\,5\,4},\ L\binom{3\,4\,2}{3\,4\,5},\ L\binom{3\,5\,2}{3\,5\,4}$$

kommt nur zweimal in diesen Gleichungen vor. Ihre Elimination kann also nur auf eine einzige Weise erfolgen, und es genügt zu beweisen, dass die Gleichungen, die durch diese Elimination entstehen, erfüllbar sind.

Diese sind:

$$\frac{\partial^2 L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_2\,\partial y_3} - \frac{\partial^2 L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_4\,\partial y_5} = \frac{\partial A\binom{2\,1\,5}{2\,3\,4}}{\partial y_2} + \frac{\partial A\binom{4\,1\,3}{4\,2\,5}}{\partial y_4} = \frac{\partial A\binom{2\,1\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_3} - \frac{\partial A\binom{5\,1\,3}{5\,2\,4}}{\partial y_5}$$

$$\frac{\partial^2 L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_2\,\partial y_3} + \frac{\partial^2 L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}}{\partial y_4\,\partial y_5} = -\frac{\partial A\binom{3\,1\,5}{3\,2\,4}}{\partial y_3} - \frac{\partial A\binom{4\,1\,2}{4\,3\,5}}{\partial y_4} = -\frac{\partial A\binom{3\,1\,4}{3\,2\,5}}{\partial y_3} + \frac{\partial A\binom{5\,1\,2}{5\,3\,4}}{\partial y_5}.$$

Die Bestimmung von $L\binom{2\,3\,4}{2\,3\,5}$ und $L\binom{4\,5\,2}{4\,5\,3}$ aus diesen Gleichungen ist nun

in der That stets ausführbar, da man mit Hülfe der Relationen (α) leicht erhält:

$$\frac{\partial A\binom{2\,1\,5}{2\,3\,4}}{\partial y_3}+\frac{\partial A\binom{4\,1\,3}{4\,2\,5}}{\partial y_4}+\frac{\partial A\binom{5\,1\,3}{5\,2\,4}}{\partial y_2}-\frac{\partial A\binom{2\,1\,4}{2\,3\,5}}{\partial y_3}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_3}\Big[A\binom{2\,1\,3}{2\,4\,5}+A\binom{2\,1\,5}{2\,3\,4}-A\binom{2\,1\,4}{2\,3\,5}\Big]$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_3}\Big[K_2(3\,4\,5)\Big]=0$$

und ebenso:

$$\frac{\partial A\binom{3\,1\,5}{3\,2\,4}}{\partial y_3}+\frac{\partial A\binom{4\,1\,2}{4\,3\,5}}{\partial y_4}+\frac{\partial A\binom{5\,1\,2}{5\,3\,4}}{\partial y_3}-\frac{\partial A\binom{3\,1\,4}{3\,2\,5}}{\partial y_3}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_3}\Big[A\binom{3\,1\,2}{3\,4\,5}+A\binom{3\,1\,5}{3\,2\,4}-A\binom{3\,1\,4}{3\,2\,5}\Big]$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_3}\Big[K_3(2\,4\,5)\Big]=0.$$

b) Die Fortschaffung derjenigen Glieder, die nur 4 Indices enthalten, geschieht jetzt durch Subtraktion des Ausdruckes:

$$V\Big[\sum_{abc}L'\binom{a\,b\,c}{a\,b\,c}y_1\Delta\binom{1\,a\,b\,c}{1\,a\,b\,c}\Big]$$

$$=2\sum_{a,b,c}\sum_{\delta=a,b,c}(-1)^{[abc(\delta)]}\frac{\partial L'\binom{a\,b\,c}{a\,b\,c}}{\partial y_\delta}\Delta\binom{1\,a\,b\,c\,(\delta)}{a\,b\,c}+\cdots$$

nach Integration der Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial L'\binom{a\,b\,c}{a\,b\,c}}{\partial y_\delta}=(-1)^{[abc(\delta)]}A\binom{1\,a\,b\,c\,(\delta)}{a\,b\,c}.$$

Die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen sind:

$$\sum_{\vartheta=a,b,c}(-1)^{(a\vartheta)}\frac{\partial A\binom{1\,a\,\vartheta}{a\,b\,c}}{\partial y_\vartheta}=0, \qquad (a=a,b,c)$$

d. h. diejenigen Gleichungen, in die die Relationen (α) übergehen, wenn man die A, die alle 5 Indices enthalten, gleich Null setzt.

3. $\nu = 4$.

Die Gleichungen (3) sind hier:

$$A\binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,5} = -\frac{\partial L\binom{2\,3\,4\,5}{2\,3\,4\,5}}{\partial y_5}$$

$$A\binom{1\,2\,3\,5}{2\,3\,4\,5} = +\frac{\partial L\binom{2\,3\,4\,5}{2\,3\,4\,5}}{\partial y_4}$$

$$A\binom{1\,2\,4\,5}{2\,3\,4\,5} = -\frac{\partial L\binom{2\,3\,4\,5}{2\,3\,4\,5}}{\partial y_3}$$

$$A\binom{1\,3\,4\,5}{2\,3\,4\,5} = +\frac{\partial L\binom{2\,3\,4\,5}{2\,3\,4\,5}}{\partial y_2}.$$

Die Gleichungen (α)

$$\sum_{\delta} (-1)^{(\alpha\beta\vartheta)} \frac{\partial A\binom{1\,\alpha\,\beta\,\vartheta}{2\,3\,4\,5}}{\partial y_\delta} = 0.$$

sind die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen.

4. $\nu = 5$

führt, da $\Delta\binom{1\,2\,3\,4\,5}{1\,2\,3\,4\,5}$ den Index 1 zweimal enthält, auf den Fall: $n' = 4$, $\nu' = 4$ zurück.

Die Durchführung der Rechnung für $n = 6$ gestaltet sich ganz analog. Da sie indessen ziemlich umfangreich ist und auch kein principielles Interesse darbietet, habe ich mich ihrer Darstellung enthalten zu müssen geglaubt.

Es gilt demnach, um die Ergebnisse des Abschnittes II noch einmal kurz zusammenzufassen, für $n = 4, 5, 6$ das Theorem:

Wenn der Ausdruck F die Eigenschaft hat, dass sein δF sich selbst adjungiert ist, so hat F die Struktur

$$\sum_{a\,b\ldots c} \sum_{a_1} \sum_{b_1 \ldots c_1} A\binom{a\;b\;\ldots c}{a_1 b_1 \ldots c_1} \Delta\binom{a\;b\;\ldots c}{a_1 b_1 \ldots c_1}$$

und kann durch Quadraturen auf die Form $F = V(f)$ gebracht werden, worin

$$f = \sum_{a\,b\ldots c} \sum_{a_1 b_1 \ldots c_1} M\begin{pmatrix} a\ b\ \ldots c \\ a_1 b_1 \ldots c_1 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1\ a\ b\ \ldots c \\ 1\ a_1 b_1 \ldots c_1 \end{pmatrix}$$

ist und die Koeffizienten M Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y;\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ darstellen.

Thesen.

I.

Die Berechtigung zur Einführung einer Zahl in die Arithmetik beruht allein auf der Definition dieser Zahl.

II.

Eine innigere Verschmelzung des Unterrichtes in der experimentellen und mathematischen Physik würde das Studium dieser Wissenschaft bedeutend erleichtern.

III.

Die Beschäftigung mit den Grundlagen der modernen Naturwissenschaft führt mit Notwendigkeit zu einer Erkenntniskritik im Sinne Kants.

Lebenslauf.

Ich, Wilhelm Arthur Hertz, evangelischer Konfession, bin geboren am 28. Februar 1878 als Sohn des Verlagsbuchhändlers Hans Hertz zu Berlin.

Ich besuchte das Gymnasium zu Gross-Lichterfelde, das ich Ostern 1896 mit dem Zeugnis der Reife verliess, um Buchhändler zu werden. Nach einer einjährigen Lehrzeit in der Buchhandlung von Speyer & Peters in Berlin ging ich nach Tübingen, wo ich zunächst philosophische und historische, später auch naturwissenschaftliche und mathematische Vorlesungen hörte. Dadurch veranlasst gab ich den buchhändlerischen Beruf auf und studierte von Michaelis 1898 ab in Berlin, von Ostern 1900 ab in Kiel Mathematik und Naturwissenschaften. Am 7. März 1903 bestand ich das examen rigorosum.

Allen meinen akademischen Lehrern fühle ich mich zu herzlichem Danke verpflichtet, insbesondere Herrn Professor Stäckel für die liebenswürdige Anregung und Förderung meiner Dissertation.

Math 3239.03
Ueber partielle Differentialgleichu
Cabot Science
003292884
3 2044 091 890 772